

ISSN 0321-0367



ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

$\frac{2}{1983}$

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Николаеня А. З., Шулаков В. А., Голикова Н. А., Колесник И. И.</i> Голографический метод температурных измерений полупроводниковых приборов и интегральных схем	3
<i>Тихомиров В. В.</i> Спектр излучения каналированных частиц при высоких энергиях	6
<i>Зорин В. П., Меркулова И. П., Сыкало А. И., Черенкевич С. Н.</i> Биофизические аспекты взаимодействия онкоцитов и иммуноцитов	9
<i>Астрейко А. П., Голенков В. В.</i> Внутренний язык систем переработки дискретной информации, построенных на базе многопроцессорных графовых автоматов	12
<i>Коляда А. А.</i> Умножение чисел разных знаков в ядерно-модулярном коде	15
<i>Зенченко С. А.</i> Лазер на алюмо-иттриевом гранате с неодимом с поляризованным выходом	18
<i>Перковский Т. А.</i> Отражение и пропускание света слоем холестерического жидкого кристалла при нормальном падении	21
<i>Прокошин В. И., Шепелевич В. Г., Ярмолович В. А.</i> Исследование миниатюрных измерительных структур на основе пленок полуметаллов	24
<i>Комаров Ф. Ф., Шпилевский Э. М., Гайдук П. И., Горбачевский Д. А.</i> Характеристики $p-n$ -переходов, полученных при лазерном отжиге ионнолегированных слоев кремния	27
<i>Гусаков В. В.</i> Оптимизация согласования измерительного резонатора радиоспектрометра	30
<i>Лазарчик А. Н.</i> Оценка погрешности метода временной дискретизации в теории выбросов случайных процессов	33

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Размыслович Г. П.</i> Один метод проверки критерия управляемости	36
<i>Король И. А.</i> Синтез в определенных системах машинного перевода как задача информационного поиска	39
<i>Борзенков А. В., Габасов Р.</i> Алгоритм решения одной специальной задачи на минимум	42
<i>Ковачев В. Х.</i> Билинейные преобразования некоторых дифференциальных уравнений с рациональной правой частью	45
<i>Феденя М. М.</i> Об одном методе нахождения коэффициентов чувствительности кратного спектра линейных стационарных систем	47
<i>Люлькин А. Е.</i> К минимизации проверяющих тестов логических схем	49
<i>Булатов В. И.</i> О слипании решений систем с отклоняющимся аргументом	51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>[Изох В. В.], Курило В. С., Телегин В. Д.</i> Исследование усилителей мощности на транзисторах КТ640 и КТ938 в двухполюсном включении	54
<i>Цеханский Г. Н.</i> Влияние теплового режима работы фотоприемника на его чувствительность	55
<i>Граков В. Е., Майга А. С.</i> Влияние продольного магнитного поля на спектр высокочастотных колебаний напряжения горения вакуумной дуги на кадмии	56
<i>Самодуров А. А.</i> Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде	57
<i>Исаченко А. Н.</i> Об одном критерии для матроидов	59
<i>Рогозин С. В.</i> Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости	60
<i>Тагбино Т.</i> О совместных дифференциальных системах	62
<i>Касим Мухамед Аль-Хайдер.</i> Об изохронности гамильтоновых дифференциальных систем второго порядка с полиномами третьей степени	63
<i>Мазаник С. А.</i> Некоторые свойства E -систем	65
<i>Бобков В. В.</i> Об одном семействе методов численного решения жестких дифференциальных уравнений	67
<i>Петряев А. Н.</i> Некоторые регуляризаторы в синтезе систем «антенна — обтекатель»	68
Аннотации депонированных статей	71



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 2
МАЙ

ВЕСТНИК



Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (*главный редактор*),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (*ответственный секретарь*), И. И.
ЖБАНКОВА, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ (*зам. главного ре-*
дактора), А. М. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУПРУН, И. Г. ТИ-
ЩЕНКО

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (*ответственный редактор*),
Ю. С. БОГДАНОВ (*зам. ответственного редактора*), В. И. ВЕ-
ДЕРНИКОВ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. И. ИВА-
НОВ, Л. И. КОМАРОВ, А. И. КОМЯК, Н. А. ЛЕПЕШИН-
СКИЙ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, Б. Ю. ХАНОХ
(*ответственный секретарь*), А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, С. С. ШУШ-
КЕВИЧ

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2

Редактор *И. П. Стрельченя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *С. В. Баленок*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 08.02.83. Подписано в печать 16.05.83. АТ 16685. Формат
70X108^{1/16}. Бумага типографская № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7.0.
Усл. кр. отт. 7.44. Уч.-изд. л. 7.34. Тираж 950 экз. Заказ 81. Цена 95 коп.

Издательство Белорусского государственного университета имени
В. И. Ленина, 220048, Минск, проспект Машерова, 11. Адрес редак-
ции: 220080, Минск, Университетский городок, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК
КП Белоруссии, 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

© Вестник БГУ имени В. И. Ленина, 1983



УДК 620.19 : 778.4 : 621.382.002

А. З. НИКОЛАЕНЯ, В. А. ШУЛАКОВ,
Н. А. ГОЛИКОВА, И. И. КОЛЕСНИК

ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ТЕМПЕРАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ

Применение методов голографической интерферометрии для контроля качества и надежности элементов конструкций полупроводниковых приборов и интегральных схем (ИС) в производственных условиях связано с необходимостью повышения чувствительности этих методов, упрощения условий записи голограмм и получения количественных данных.

Метод голографической интерферометрии, который в работе [1] использован для изучения температурных полей специальной тест-структуры, довольно трудоемкий. Кроме того, по этому методу изучаемую тест-структуру необходимо погружать в этиленгликоль, температурная зависимость показателя преломления которого во много раз сильнее аналогичной зависимости для воздуха. Однако применение этиленгликоля, как показала практика, имеет ряд негативных сторон, обусловленных сильным его окислением с изменением величины показателя преломления и длительной релаксацией оптических свойств после погружения в него исследуемого объекта.

Для достижения требуемой чувствительности температурных измерений на воздухе можно использовать [2] многократное прохождение зондирующего пучка через исследуемое пространство, а также интерференцию восстановленных голограммой сопряженных волн $+1$ -го и -1 -го порядков, в результате которой чувствительность метода увеличивается вдвое.

Для экспериментальных исследований тепловых полей ИС на воздухе пользовались оптической схемой повышенной чувствительности (рис. 1). В основу построения схемы положены способы увеличения чувствительности — многоходовой и сопряженных волн.

Луч лазера 1 полупрозрачными зеркалами 2 разделяется на три пучка, два из которых после отражения от зеркал 3 и прохождения коллиматоров 4 падают на голограмму 9 под одинаковыми углами ($\Theta = 20^\circ$) и являются опорными. В предметный пучок введены полупрозрачные зеркала 6 и 6' с расстоянием между ними 20 мм, что обеспечивает 10-кратное прохождение исследуемого пространства зондирующим пучком. Максимальное увеличение чувствительности, которое было получено по данной схеме, составило 20 раз.

Исследование тепловых полей ИС проводилось методом получения интерферограмм в полосах конечной ширины, расположенных перпендикулярно к теневой границе объекта 7, что позволяет получать информацию об изменении температуры во всем окружающем пространстве от области гомогенного фона до исследуемой поверхности. С этой целью в предметный пучок был введен стеклянный клин 5 с преломляющим углом $\gamma = 2^\circ$. Интерферограммы получали в реальном времени путем

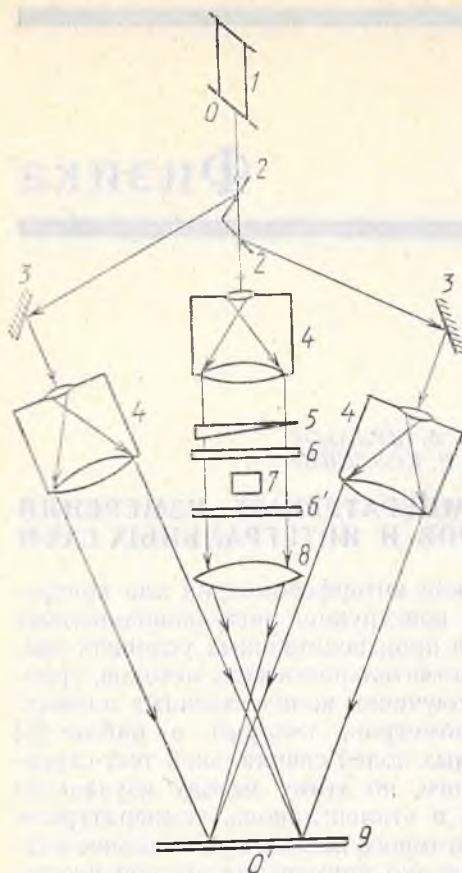


Рис. 1. Оптическая схема метода:

1 — He-Ne лазер; 2 — полупрозрачные зеркала; 3 — поворотные зеркала; 4 — коллиматоры; 5 — клин; 6, 6' — полупрозрачные зеркала резонатора; 7 — объект; 8 — линза; 9 — голограмма

экспонирования голограммы исходного состояния системы, поворота оптического клина 5 вокруг оси пучка OO' , подачи на кристалл определенной электрической мощности и фотографической регистрации сдвига полос.

С помощью формулы [2] $\nu = \frac{2\gamma(n-n_0)}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}$, где n — показатель преломления материала клина; n_0 — показатель преломления окружающей среды; γ — преломляющий угол используемого клина; α — угол поворота клина вокруг оси OO' , определена частота полос интерференционной картины, которая составила $\nu = 3,5$ лин/мм.

На рис. 2, а представлена интерферограмма в полосах конечной ширины, образованных только поворотами клина без включения исследуемой ИС и соответствующих исходному состоянию системы. Благодаря использованию в схеме линзы 8, наблюдаемая интерференционная картина и теневое изображение ИС локализованы в плоскости голограммы. На рис. 2, б, в представлены интерферограммы теплового поля ИС при подаче на кристалл электрической мощности 0,75 Вт, регистрация которых производилась соответственно по классической двухпучковой схеме (б) и по предложенной схеме (в). Анализ рис. 2, б и 2, в показывает преимущество разработанной оптической схемы, позволяющей получать

интерферограммы с более значительным изгибом интерференционных полос, по которым становится возможным проведение температурных измерений.

При количественных измерениях каждой интерференционной полосе присваивался номер. Отсчет полос вели от невозмущенной тепловым полем зоны, т. е. от первой не претерпевшей искривления интерференционной полосы в направлении роста градиента толщины клина. На представленных интерферограммах (рис. 2, б, в) номера полосам присваивались справа налево вдоль верхней теневой границы ИС. Температурные измерения проводились по интерферограмме рис. 2, в. На исследуемой границе ИС выбрано одиннадцать точек с расстоянием между ними 1 мм (на интерферограмме через 0,5 см) и для каждой из них было определено значение Δk -величины сдвига интерференционных полос от своего первоначального положения. Величина Δk определялась как разница номеров интерференционной полосы, пришедшей в точку измерения, и полосы, которая проходила бы через эту точку в отсутствие возмущения.

На рис. 3 приведено изменение величины Δk вдоль исследуемой поверхности ИС для каждой из одиннадцати точек. Определенному сдвигу интерференционных полос соответствует определенное изменение показателя преломления [2]; $n(x, y) = \frac{\Delta k(x, y)\lambda}{l} + n_0$, где λ — длина волны используемого излучения; l — длина объекта в направлении OO' .

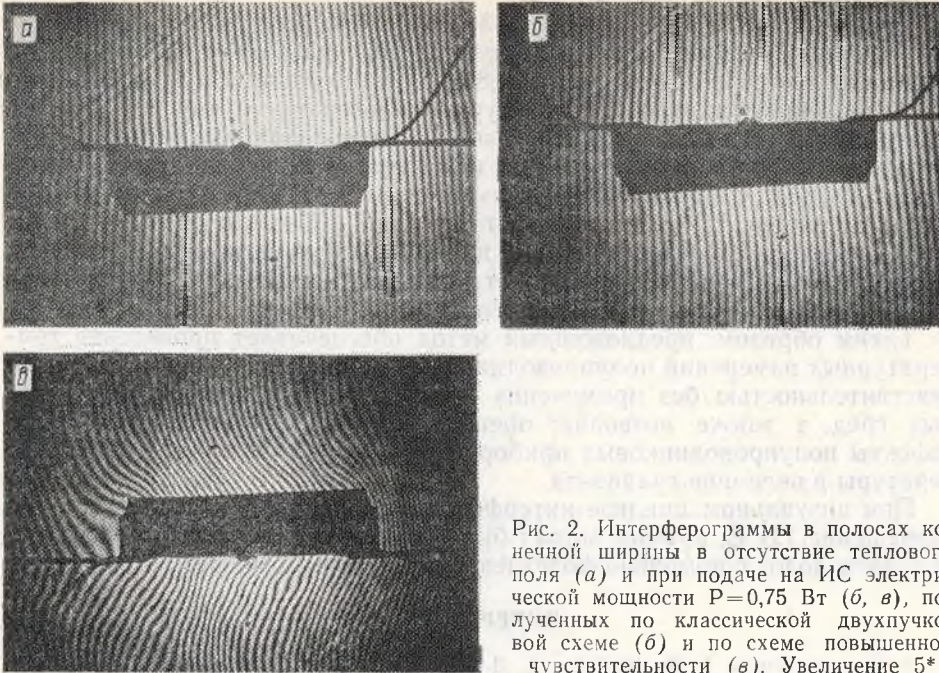


Рис. 2. Интерферограммы в полосах конечной ширины в отсутствие теплового поля (а) и при подаче на ИС электрической мощности $P=0,75$ Вт (б, в), полученных по классической двухлучковой схеме (б) и по схеме повышенной чувствительности (в). Увеличение 5^*

С другой стороны, dn/dT для воздуха в температурном диапазоне $20-100^\circ\text{C}$ имеет значение $8,7 \cdot 10^{-7}$ град $^{-1}$ [3]. Учитывая эти зависимости, измеряли температуру в различных точках поверхности корпусов ИС. При этом температурное разрешение составило $1,8^\circ\text{C}$, что соответствует сдвигу интерференционной полосы в исследуемой зоне на интерферограмме, равному половине расстояния между интерференционными полосами.

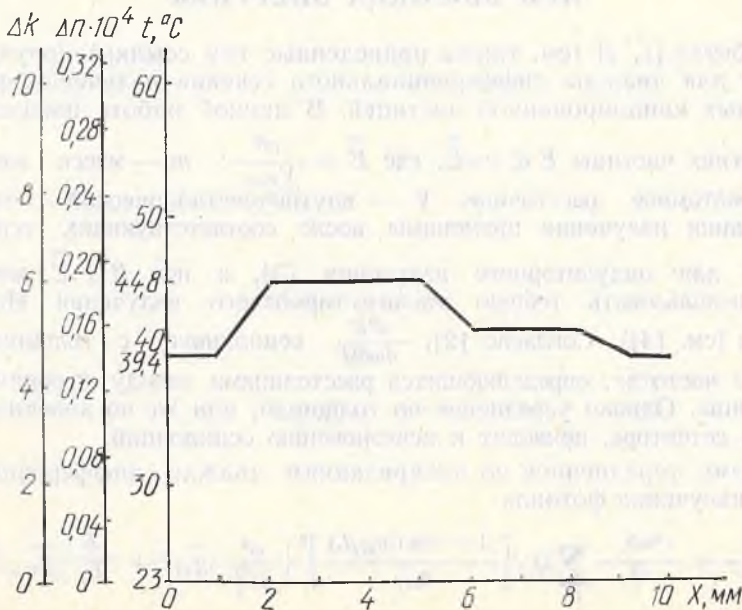


Рис. 3. Кривая измерения температуры вдоль поверхности исследуемой ИС, полученная при обработке интерферограммы рис. 2, в

Из анализа измерений (см. рис. 3) видно, что максимальное значение температуры, которое имеет исследуемая ИС при подаче электрической мощности $P=0,75$ Вт, составило $44,8^\circ\text{C}$. Можно также сделать заключение о наличии градиента температуры по поверхности корпуса ИС, который возникает из-за различия условий теплоотвода через выводы ИС. Разница значений температуры на исследуемой поверхности ИС составила $5,4$ град. Смещение зоны максимальной температуры свидетельствует о конструктивных особенностях данной ИС или о наличии каких-либо дефектов. В исследуемой ИС при микроскопическом обследовании обнаружен обрыв одного вывода от траверсы корпуса ИС, что привело к ухудшению теплоотвода и увеличению температуры.

Таким образом, предложенный метод обеспечивает проведение температурных измерений полупроводниковых приборов ИС с регулируемой чувствительностью без применения дополнительных термочувствительных сред, а также позволяет оценить конструктивные особенности и дефекты полупроводниковых приборов и ИС по разбросу значений температуры и величине градиента.

При визуальном анализе интерферограмм достигнуто температурное разрешение $1,8^\circ\text{C}$, которое может быть значительно увеличено при оценке сдвига полос с помощью фотоэлектрической регистрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаева А. З., Буйко Л. Д., Шулаков В. А., Руденкова В. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. физ., мат. и мех., 1983, № 1, с. 6.
2. Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия.— М., 1977.
3. Краткий справочник по химии / Под ред. О. Д. Куриленко.— Киев, 1965.

Поступила в редакцию
15.10.80.

Кафедра физической электроники

УДК 539.121.7

В. В. ТИХОМИРОВ

СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ КАНАЛИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

В работах [1, 2] (см. также приведенные там ссылки) получено выражение для дважды дифференциального сечения излучения фотонов, излученных каналированной частицей. В данной работе показано, что при энергиях частицы $E \ll md\tilde{E}$, где $\tilde{E} = \frac{m^2}{V_{\max}}$; m — масса электрона; d — межатомное расстояние; V — внутрикристаллический потенциал, для описания излучения применимы после соответствующих усреднений формулы для ондуляторного излучения [3], а при $E \gg \tilde{E}$ для этого можно использовать теорию магнито-тормозного излучения Никишова и Ритуса (см. [4]). Согласно [2], $\frac{d^2N}{d\omega d\Omega}$ осциллирует с толщиной кристалла на частотах, определяющихся расстояниями между уровнями энергии частицы. Однако усреднение по толщинам, или же по конечному разрешению детектора, приводит к исчезновению осцилляций.

Поэтому усредненное по поляризациям дважды дифференциальное сечение излучения фотонов

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega S_{\perp}}{\pi^2} \sum_{if} Q_{ii} \left[\frac{1 - \exp(iq_{zif}L)}{q_{zif}} \right]^2 \left\{ \frac{\omega^2}{2E_1^2} |\bar{g}_{if}|^2 + \frac{E}{E_1} |\bar{g}_{if\perp}|^2 \right\}, \quad (1)$$

где

$$\bar{g}_{if} = \frac{1}{2E} (\bar{I}_{2if} + E\bar{n}_{z\perp} J_{1if}; -m\bar{n} J_{1if}), \quad \bar{g}_{if\perp} = \frac{1}{2E} (\bar{I}_{2if} + E\bar{n}_{z\perp} J_{1if}), \quad (2)$$

$$\bar{I}_{2if} = -iN_{\perp} \int_{\Delta} e^{-i\bar{k}\bar{\rho}} \bar{\Psi}_{i\bar{k}}^*(\bar{\rho}) \bar{\nabla}_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}_{i\bar{k}}(\bar{\rho}) d\bar{\rho}, \quad J_{1if} = N_{\perp} \int_{\Delta} e^{-i\bar{k}\bar{\rho}} \bar{\Psi}_{i\bar{k}}^*(\bar{\rho}) \bar{\Psi}_{i\bar{k}}(\bar{\rho}) d\bar{\rho}$$

$\bar{n}_{z\perp}$ — составляющая единичного вектора \bar{n}_z , вдоль которого двигался начальный электрон, поперечная направлению \bar{n} излучения фотона; $\bar{\rho}$ — радиус-вектор, описывающий поперечное движение частицы, одномерное в случае плоскостного каналирования и двумерное в случае осевого.

Отметим, что в случае тонкого кристалла для качественного описания процесса захвата электрона в режим каналирования можно использовать модель Калашникова и Рязанова, в которой состояние начального электрона в кристалле описывается плоской волной [5]. Однако при более точном рассмотрении случая тонкого кристалла необходимо использовать эйкональное приближение.

Как известно [6], спектр излучения и его угловые характеристики существенно зависят от соотношения между $\Theta_{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ и углом поворота при движении частицы по траектории, который в случае каналирования не превышает $\Theta_L = \sqrt{\frac{2V_{\max}}{E}}$. Случай $\Theta_L \ll \Theta_{\gamma}$ реализуется при энергиях частицы существенно меньших $\bar{E} = \frac{m^2}{V_{\max}} \sim 1 - 10$ ГэВ, в зависимости от выбора кристалла. Его анализ и сопоставление с классической теорией излучения даны в [2]. В настоящее время проводятся и планируются эксперименты по каналированию частиц с энергиями, значительно превышающими \bar{E} . В связи с этим становится актуальной задача анализа и упрощения точного квантово-механического выражения (1) при $E \gg \bar{E}$.

При не слишком высоких энергиях каналированной частицы она в основном излучает фотоны с $\omega \ll E$ и можно использовать результаты классической теории излучения. Это проще всего показать для случая плоскостного каналирования в достаточно толстом кристалле, когда $|1 - \exp(-iqL)|/q \approx 2\pi\delta(q)$. Для этого нужно использовать квазиклассические выражения для волновых функций, данные в [2]. Преобразовав показатели экспонент в (2), мы получим

При не слишком высоких энергиях каналированной частицы она в основном излучает фотоны с $\omega \ll E$ и можно использовать результаты классической теории излучения. Это проще всего показать для случая плоскостного каналирования в достаточно толстом кристалле, когда $|1 - \exp(-iqL)|/q \approx 2\pi\delta(q)$. Для этого нужно использовать квазиклассические выражения для волновых функций, данные в [2]. Преобразовав показатели экспонент в (2), мы получим

$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2L}{2\pi\omega} \sum_i Q_{ii} \delta[\omega(1 - \beta_1 \cos \Theta) - \varepsilon_i(E) + \varepsilon_f(E)] |b_{\perp, i-f}(\omega, \Theta, \varphi)|^2 \quad (3)$$

$$b_{\perp, i-f}(\omega, \Theta, \varphi) = \frac{\omega}{T} \int_0^T (\Theta + v_x(t)) \exp\{i[\omega \cdot (1 - \beta_1 \cos \Theta)t - \omega(n_x x + n_y y + n_z \delta z)]\} dt, \quad (4)$$

где $T = T_{\text{under}}$ при подбарьерном и $T = T_{\text{above}}$ при надбарьерном движении, δz — продольное отклонение от траектории, соответствующей равномерному движению частицы вдоль канала со скоростью $\beta_1 = \beta - \frac{\varepsilon_f}{E} + \frac{V_1}{E}$,

$$V_1 = \frac{1}{T} \int_0^T V(x(t)) dt.$$

Умноженная на ω и проинтегрированная по углу Θ формула (3) с требуемой точностью совпадает с усредненной по точкам влета в кристалл с учетом надбарьерных состояний формулой (9) из [3], а (4) совпадает с (10) из [3].

При $E \gg \bar{E}$ полный угол отклонения каналированных частиц при движении по траектории значительно превышает угол излучения частиц Θ_{γ} . Согласно [6] (см. § 77 и задачу № 1 к нему), излучение с каждого элемента траектории определяется его кривизной и может быть рассчитано по теории магнитотормозного излучения. Усреднив по траектории, углам и точкам влета частиц в кристалл формулу (90.23) из [4], получим спектр излучения каналированных частиц при $E \gg \bar{E}$. Например, в случае плоскостного каналирования

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{2\alpha\omega L}{\sqrt{\pi} d\gamma^2} \int a(\Theta) d\Theta \int_0^d \frac{dx}{\tilde{T}(x)} \int_{x_1}^{d-x_1} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{2E(E-\omega)} \right) \frac{\Phi'(u(x'))}{u(x')} + \frac{1}{2} \int_{u(x')}^{\infty} \Phi(u) du \right] \frac{dx'}{v(x, x')}, \quad (5)$$

где $\tilde{T}(x) = \int_{x_1(x)}^{d-x_1(x)} \frac{dx'}{v(x, x')}$, $\varepsilon(x) = V(x) + \frac{E\Theta^2}{2}$, $v(x, x') = \sqrt{\frac{2(\varepsilon(x) - V(x'))}{E}}$,

$u(x) = \left[\frac{m\omega}{|V'(x)|\gamma^2} \right]^{2/3} x_1(x)$ — точка поворота при $\varepsilon(x) < V_{\max}$, $x_1(x) = 0$ при $\varepsilon(x) \geq V_{\max}$, $a(\Theta)$ — функция распределения по углу Θ падающего пучка. Отметим, что для частиц, заселяющих нижние состояния в потенциальной яме поперечного движения, теория магнитотормозного излучения неприменима, но при условии $E \gg \tilde{E}$ их вклад в спектр излучения пренебрежимо мал.

В теории магнитотормозного излучения важную роль играет параметр χ , который в случае каналирования можно записать в виде $\chi(x) = \frac{|V'(x)|\gamma}{m^2}$. Он достигает единицы при плоскостном каналировании в вольфраме примерно при $\gamma \simeq 5 \cdot 10^5$, однако, так как $\chi \simeq \frac{V\gamma}{dm^2}$, то при осевом каналировании область $\chi \simeq 1$ можно достичь при энергиях в несколько десятков ГэВ. Отметим, что при $\chi \simeq 1$ основная часть энергии электрона излучится на длине пробега, не превышающей миллиметра. После всех усреднений спектр излучения не будет качественно отличаться от спектра магнитотормозного излучения, изображенного на рис. 15 в [4]

Из анализа спектра следует, что при энергиях частицы $E \gg \tilde{E}$ дифференциальная интенсивность излучения будет увеличиваться с ростом энергии. Следовательно, утверждение [7, 8] о падении интенсивности при $E \geq \tilde{E}$ и существовании «оптимальной» энергии каналированных частиц при $E \approx \tilde{E}$ неверно. Некоторое подавление интенсивности излучения будет проходить лишь при $E \simeq md\tilde{E}$, когда $\chi \geq 1$. Из (5), так же, как и в [4], можно получить выражение для полной энергии, излученной частицей при каналировании в кристалле толщины L :

$$I = -\frac{\alpha m^2}{2\sqrt{\pi}} \int a(\Theta) d\Theta \int_0^d \frac{\chi(x) dx}{\tilde{T}(x)} \int_{x_1(x)}^{d-x_1(x)} \left[\int_0^{\infty} \frac{4+5\chi(x)u^{3/2}+4\chi^2(x)u^3}{(1+\chi(x)u^{3/2})^4} \Phi'(u) u du \right] \frac{dx'}{v(x, x')}. \quad (6)$$

Спектральное разложение (5) обрывается при $\omega \simeq \frac{V_{\max}\gamma^2}{md}$ или при $\omega \simeq \frac{1}{md} \left(\frac{E}{\tilde{E}} \right) E$, где $\frac{1}{md} < 10^{-2}$, т. е. при $E \sim md\tilde{E}$ частица будет излу-

чать фотоны с $\omega \simeq E$, следовательно, утверждение работы [8] о том, что излучение каналированной частицы происходит в области энергий $\omega \ll E$, неверно. Область применения формул классической теории излучения (3), (4), определяемая требованием $\omega \ll E$, простирается до энергий, значительно превышающих \tilde{E} (причем они справедливы и при $E < \tilde{E}$, так как и в этом случае $\omega \ll E$, где они переходят в (12) из [2]). В то же время формулы (5), (6) справедливы в области $E \gg \tilde{E}$, перекрывающейся с областью применимости формул (3), (4) $E < md\tilde{E}$, в которой $\omega \ll E$. Таким образом, мы получили выражения для спектрального разложения излучения каналированных частиц для произвольных потенциалов и энергий, при которых применимо квазиклассическое описание поперечного движения частиц в канале.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Г. Барышевскому за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г.— Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 2, с. 331.
2. Baryshevskii V. G., Grybich A. O., Dubouskaya I. Ya.— Phys. Stat. Sol(b), v. 99, p. 205.
3. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г.— Труды ФИАН, 1975, т. 80, с. 100.
4. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.— М., 1980.
5. Калашников Н. П., Ольчак А. С. Взаимодействие ядерных излучений с монокристаллами.— М., 1979.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М., 1973.
7. Жеваго Н. К.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 4, с. 1389.
8. Базылев В. А., Глебов В. И., Жеваго Н. К.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 1, с. 62.

Поступила в редакцию
14.03.81.

Кафедра ядерной физики

УДК 616-097.612.017

*В. П. ЗОРИН, И. П. МЕРКУЛОВА,
А. И. СЫКАЛО, С. Н. ЧЕРЕНКЕВИЧ*

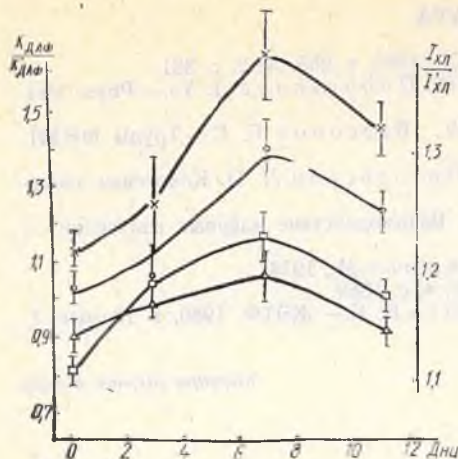
БИОФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОНКОЦИТОВ И ИММУНОЦИТОВ

Взаимодействие опухолевых клеток и иммуноцитов с последующей гибелью онкоцитов является формой реализации иммунологического надзора [1], традиционная трактовка которого получает в последние годы развитие как в плане понимания закономерностей онтогенеза опухолевых клеток, так и в плане новых взглядов на взаимоотношения опухоли и организма, системы иммунитета и опухоли [2]. В связи с этим особый интерес представляют механизм и количественная оценка взаимодействия опухолевых клеток-мишеней и иммуноцитов.

Количественная характеристика взаимодействия иммуноцитов и клеток-мишеней, основанная на определении радиоактивного хрома, вышедшего в среду из разрушенных клеток-мишеней, позволяет оценить лишь исход этого взаимодействия [3] или количественно учесть влияние модификации среды взаимодействия клеток на проявления киллер-эффекта [4]. Необходимость применения культуральных методов и использование радиоактивной метки ограничивает распространение в клинической и экспериментальной практике такого способа оценки эффективности конечного этапа клеточного иммунного ответа.

Электронная микроскопия взаимодействующих иммуноцитов и клеток-мишеней в организме [5] и в культуре вне его [6] хотя и дали много новых и интересных фактов об особенностях этой формы межклеточного взаимодействия, однако не нашли (как и методы электронной гистохимии [7] или криофрактографии [8]), в силу своей трудоемкости и статичности, широкого применения. Для преодоления недостатков указанных методов была предпринята попытка на основе методов люминесценции количественно оценить интенсивность и охарактеризовать динамику параметров взаимодействия иммуноцитов и клеток-мишеней.

Исследовано изменение перекисного окисления липидов и активности неспецифических клеточных эстераз, сопутствующее взаимодействию онкоцитов и иммуноцитов. В качестве клеток-мишеней использовали клетки асцитной гепатомы мышей (АГ-22а) в рабочей концентрации $5 \cdot 10^6$ кл/мл. Иммунные лимфоциты выделяли по стандартной методике из тимуса и брыжеечных лимфоузлов крыс, предиммунизированных клетками-мишенями. Рабочая концентрация иммуноцитов составляла $10 \cdot 10^6$ кл/мл. Смесь взвешенных клеток АГ-22а и иммуноцитов в растворе Хэнкса осаждали центрифугированием и инкубировали 30 мин при 37°C ; осадок ресуспендировали, и полученную взвесь клеток немедленно использовали для измерений. Контролем служила смесь тех же кле-



Зависимость отношения скорости гидролиза ДАФ (\times) и интенсивности хемилюминесценции (Δ) в суспензии совместно и раздельно инкубированных иммуноцитов и онкоцитов от времени после иммунизации. Лимфоциты селезенки — \times ; лимфоциты тимуса — \circ

опухолевой клетки и одного или нескольких прикрепленных к ней лимфоцитов. В контроле число кластеров не превышало 1—2 %. Активность эстераз в опытных образцах с высоким содержанием кластеров в 1,4—2 раза превышала значения в контрольной группе. Для суспензий с активным взаимодействием онкоцит — иммуноцит выявлено увеличение по сравнению с контролем иницированного Fe^{2+} хемилюминесцентного свечения. Изменение скорости ферментативного распада ДАФ и интенсивности хемилюминесценции оказалось взаимосвязанным (см. рисунок).

Данные обоих методов свидетельствуют, что оценка интенсивности иницированной Fe^{2+} хемилюминесценции и активности клеточных эстераз во взаимодействующих онкоцитах и иммуноцитах является простым и информативным показателем киллерной активности иммуноцитов по отношению к опухолевым клеткам. Содержательная интерпретация полученных результатов выявила ряд интересных закономерностей.

Вопреки сложившемуся представлению [1] об иммунологической реактивности тимуса при иммунизации тимоциты продемонстрировали более низкую по абсолютным показателям, но сходную по динамике реактивности. Способность лимфоцитов тимуса осуществлять киллерные реакции свидетельствует, что в этом центральном органе клеточного иммунитета происходит антигензависимая дифференцировка T -лимфоцитов с образованием конечных эффекторных форм. Обращает на себя внимание меньшее повышение способности к инициации хемилюминесценции у тимоцитов по сравнению с лимфоцитами брыжеечных лимфоузлов (соответственно с 1,15 до 1,19 и с 1,11 до 1,22).

Эти данные, не укладывающиеся в сложившиеся представления о гистофизиологии тимуса, хорошо согласуются с предложенной ранее одним из авторов [10] схемой формирования толерантности в тимусе. Судя по реакции тимоцитов на иммунизацию в органе происходит (хотя и не так интенсивно, как в периферических лимфоидных органах) пролиферация и дифференцировка тимоцитов в эффекторные клетки.

В обычных условиях в тимус не проникают иммунокомпетентные клетки из циркуляции и наиболее вероятно внутриорганный происхождение клеток, вступающих во взаимодействие с онкоцитами *in vitro* [1].

Результаты исследований позволяют высказать некоторые суждения об особенностях поведения клеток при взаимодействии онкоцитов и им-

ток, приготовленная непосредственно перед измерением, и изолированные исходные клеточные популяции.

Динамику активности неспецифической эстеразы определяли с помощью диацетатфлуоресцеина (ДАФ). ДАФ в исходной форме практически не люминесцирует, его молекулы в растворе нейтральны и диффундируют через цитолемму, где под действием внутриклеточных эстераз ДАФ превращается в флуоресцеин. По увеличению интенсивности флуоресценции ($\lambda_{возб} = 480$ нм, $\lambda_{рег} = 530$ нм) можно судить о суммарной активности клеточных эстераз. Уровень перекисного окисления липидов оценивали по интенсивности хемилюминесцентного свечения, иницированного ионами Fe^{2+} [9].

По данным световой микроскопии, значительная часть совместно инкубированных клеток (15—18 %) формирует кластеры, состоящие из

муноцитов. В исследованной модели происходит, судя по возрастанию активности неспецифических эстераз, активация внутриклеточных ферментов. Этот факт хорошо согласуется с данными электронной микроскопии и электронной гистохимии об активации лизосом и пластинчатого комплекса в клетках-мишенях и клетках-киллерах [7]. Усиление перекисного окисления при взаимодействии онкоцитов и иммуноцитов у иммунизированных опухолевыми клетками животных может быть объяснено в сопоставлении с исследованиями ультраструктуры зоны контакта в системе иммунный лимфоцит — клетка-мишень. Показано [6], что в зоне контакта происходит изменение структуры мембран взаимодействующих клеток, а на противоположном полюсе — сдувание участков мембраны [11]. Методами криофрактографии [8] выявлено упрощение поверхностной структуры мембраны клеток-мишеней, снижение плотности распределения элементарных белковых глобул на их поверхности. Таким образом, активация перекисного окисления липидов в матриксе мембран взаимодействующих онкоцитов и иммуноцитов свидетельствует в пользу представлений о дестабилизации мембран клеток-мишеней и их лизосом, как в механизме «летального удара» [12].

Попытка применения люминесцентных методов исследования эффекторного взаимодействия иммунных лимфоцитов различного происхождения и опухолевых клеток продемонстрировала простоту и надежность методов количественной оценки взаимодействия и выявила возможность анализа динамики свойств взаимодействующих клеток в ходе реакции. Интерпретация полученных данных позволила подтвердить ранее высказанное предположение [10] о наличии в тимусе иммунизированных животных антигензависимых дифференцировок, включая дифференцировки на последнем эффекторном звене иммуногенеза. Получены данные, дополняющие представление о механизмах повреждения клеток-мишеней при их взаимодействии с иммунными лимфоцитами. Используемые методы могут быть рекомендованы как для количественной оценки взаимодействия иммунных лимфоцитов — клеток-мишеней, так и для расшифровки механизмов этого взаимодействия или сравнительной характеристики веществ, влияющих на это взаимодействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернет Ф. М. Клеточная иммунология.— М., 1971, с. 542.
2. Кавецкий П. Е., Бутенко З. А. и др. Проблемы канцерогенеза и антиканцерогенеза.— Киев, 1979, с. 256.
3. Leijlsmaker et al.— J. of Immunology, 1977, v. 119, № 4, p. 1507.
4. Maull J., Rudolf H. et al.— Immunology, 1970, v. 18, № 4, p. 517.
5. Batchelov J. R., Welch R. I.— British medical bulletin, 1976, v. 32, № 3, p. 113.
6. Sanderson C. J.— Proc. R. Soc. Lond. B., 1977, v. 198, p. 315.
7. Thiernesse N., David A.— Comptes Rendus des seances de l'Academie, 1978, v. D. 285, № 6, p. 713.
8. Fried D. S., Smith H. A.— Am. J. of Pathology, 1977, v. 86, № 1, p. 149.
9. Владимиров Ю. А., Арчаков А. И. Перекисное окисление липидов в биологических мембранах.— М., 1974.
10. Сыкало А. И., Жарикова Н. А.— Здравоохранение Белоруссии, 1978, № 3, с. 36.
11. Быковская С. Н., Быковский А. Ф. и др.— Бюл. эксп. биол. и мед., 1977, № 10, с. 443.
12. Брондз Б. Д., Рохлин О. В. Молекулярные и клеточные основы механизма иммунологического распознавания.— М., 1978.

Поступила в редакцию
19.03.81.

Кафедра биофизики

ВНУТРЕННИЙ ЯЗЫК СИСТЕМ ПЕРЕРАБОТКИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ, ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ГРАФОВЫХ АВТОМАТОВ

Данная работа является продолжением работы [1] и посвящена исследованию языка логики семантических сетей, который рассматривается нами как основа внутреннего языка ОВСПСС. В качестве способа представления данных (способа представления семантических сетей) в памяти ОВСПСС предложен графовый код [2—5]. Семантические сети, представленные в графовом коде, названы ГК-графами. Язык логики семантических сетей представляет собой способ введения логических связей и кванторов в семантическую сеть [6] или, иными словами, способ записи логических формул в виде семантических сетей. Способ записи формул языка исчисления предикатов в памяти ОВСПСС, т. е. в виде ГК-графов, назовем языком исчисления ГК-графов (ЯИГК).

Язык исчисления ГК-графов рассмотрим как способ сведения логических связей и кванторов к метапредикатам. Введем модифицированный язык исчисления предикатов (МЯИП), являющийся некоторым расширением классического языка исчисления предикатов и отличающийся от последнего следующим:

1) в алфавит символов МЯИП вводятся символы вхождения предикатов в конкретные атомарные формулы P_i^j , где P_i — предикатный символ; j — внутрискобочная часть атомарной формулы;

2) компонентами атомарных формул МЯИП могут быть не только предметные и предикатные символы, но и символы вхождения предикатов;

3) некоторые группы компонентов атомарных формул могут заключаться в круглые скобки, что будет означать отсутствие упорядоченности между элементами этой группы.

Указанное расширение классического языка исчисления предикатов предпринято для того, чтобы иметь возможность описывать не только алгебраические модели, но и некоторое их обобщение, названное нами квазиграфами [3].

Утверждение 1. Любая формула МЯИП представима в виде конъюнкции атомарных формул МЯИП.

Доказательство проведем путем рассмотрения способа преобразования произвольной формулы МЯИП в конъюнкцию его атомарных формул. Основная сложность при этом заключается в выборе удобных метапредикатов, к которым должны сводиться логические связи и кванторы.

Разложим произвольную формулу МЯИП (Φ_i) на простые множители [7]:

$$\Phi_i = \Phi_{i11} \wedge \dots \wedge \Phi_{i1k} \wedge \Phi_{i21} \wedge \dots \wedge \Phi_{i2l} \wedge \Phi_{i31} \wedge \dots \wedge \Phi_{i3m} \wedge \Phi_{i41} \wedge \dots \wedge \Phi_{i4n} \wedge \Phi_{i51} \wedge \dots \wedge \Phi_{i5p},$$

где Φ_{i1j} — атомарные формулы; Φ_{i2j} — V -формулы или $\exists V$ -формулы; Φ_{i3j} — \exists -формулы, кроме $\exists V$ -формул; Φ_{i4j} — \neg -формулы; Φ_{i5j} — V -формулы или \rightarrow -формулы.

Формуле Φ_i поставим в соответствие атомарную формулу Φ'_i с метапредикатом P_Φ , которая отражает структуру разложения формулы Φ_i на простые множители: $\Phi'_i = P_\Phi(x_{\Phi 1}, x_{\Phi 2}, x_{\Phi 3}, x_{\Phi 4}, x_{\Phi 5})$. Компоненты этой атомарной формулы имеют следующий смысл.

Первый компонент ($x_{\Phi 1}$) — знак конъюнкции всех атомарных формул, являющихся членами разложения преобразуемой формулы Φ_i на простые множители. Первый компонент связывается с обозначаемой им

конъюнкцией атомарных формул при помощи бинарного предиката P_α (множество-элемент): $P_\alpha(x_{\Phi_1}, \Phi_{i11}, \dots, \Phi_{i1k})$. Это выражение представляет собой сокращенную запись множества атомарных формул с предикатом P_α , связывающих x_{Φ_1} с вхождениями предикатов и компонентами атомарных формул $\Phi_{i11} \div \Phi_{i1k}$. Семантически x_{Φ_1} можно интерпретировать как знак множества фиксированных в рамках Φ_i предметных переменных и переменных вхождений предикатов. Если Φ_i является теорией, то в x_{Φ_1} включаются все предметные и предикатные константы. Атомарные формулы с метапредикатом P_Φ , имеющие только один первый компонент, будем называть вырожденными P_Φ -формулами.

\vee — формулы (Φ_{i2j}) разложения формулы Φ_i на простые множители представим в виде $\Phi_{i2j} = \Phi_{i2j1} \vee \dots \vee \Phi_{i2jn}$, где $\Phi_{i2j1} \div \Phi_{i2jn}$ не являются \vee -формулами. Каждой формуле Φ_{i2j} поставим в соответствие атомарную формулу с симметричным метапредикатом P_\vee . Компонентами такой атомарной P_\vee -формулы являются вхождения предикатов в P_Φ -формулы, соответствующие формулам $\Phi_{i2j1} \div \Phi_{i2jn}$. Вторым компонентом (x_{Φ_2}) P_\vee -формулы Φ_i есть знак множества вхождений предикатов в атомарные P_\vee -формулы, соответствующие всем \vee -формулам (Φ_{i2j}) , являющимися простыми множителями формулы Φ_i . Предметный символ x_{Φ_2} связывается с элементами обозначаемого им множества атомарными формулами с предикатом P_α .

Если формула Φ_{i2j} является $\exists \vee$ -формулой $\Phi_{i2j} = \exists x_1 \dots x_n (\Phi_{i2j1} \vee \dots \vee \Phi_{i2jn})$, то формуле Φ_{i2j} также ставится в соответствие атомарная формула с метапредикатом P_\vee , компонентами которой являются вхождения предикатов в P_Φ -формулы, соответствующие формулам $\Phi_{i2j1} \div \Phi_{i2jn}$. При этом вхождение предиката в указанную P_\vee -формулу также включается во множество x_{Φ_2} .

\exists -формулы (Φ_{i3j}) разложения формулы Φ_i на простые множители имеют вид $\Phi_{i3j} = \exists x_1 \dots x_n \Phi_{i3j}$, где Φ_{i3j} не является \exists -формулой. Третий компонент (x_{Φ_3}) атомарной P_Φ -формулы Φ_i есть знак множества вхождений предикатов в P_α -формулы, соответствующие формулам Φ_{i3j} . Предметный символ x_{Φ_3} связывается P_α -формулами со всеми элементами обозначаемого им множества.

\neg — формулы (Φ_{i4j}) разложения формулы Φ_i на простые множители имеют вид $\Phi_{i4j} = \neg \Phi_{i4j}$ или $\Phi_{i4j} = \neg \exists x_1 \dots x_n \Phi_{i4j}$, где Φ_{i4j} и Φ_{i4j} не являются \exists -формулами. Четвертый компонент атомарной P_Φ -формулы Φ_i есть знак множества вхождений предикатов в P_Φ -формулы, соответствующие формулам Φ_{i4j} или Φ_{i4j} . Предметный символ x_{Φ_4} связывается P_α -формулами со всеми элементами обозначаемого им множества.

\forall -формулы (Φ_{i5j}) разложения формулы Φ_i на простые множители представим в виде: $\Phi_{i5j} = \forall x_1 \dots x_n (\Phi_{i5j1}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \exists y_1 \dots y_m \Phi_{i5j2}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$, где Φ_{i5j2} не является \exists -формулой и импликацией формул, а Φ_{i5j1} не является \forall -формулой и импликацией формул [8, 9]. Каждой формуле Φ_{i5j1} поставим в соответствие атомарную формулу с бинарным асимметричным метапредикатом P_{\rightarrow} . Первым компонентом такой атомарной P_{\rightarrow} -формулы является вхождение предиката в P_Φ -формулу, соответствующую формуле Φ_{i5j1} . Вторым компонентом этой P_{\rightarrow} -формулы является вхождение предиката в P_Φ -формулу, соответствующую формуле Φ_{i5j2} . Пятым компонентом (x_{Φ_5}) атомарной P_Φ -формулы Φ_i задается как знак множества вхождений предикатов в атомарные P_{\rightarrow} -формулы, соответствующие всем \forall -формулам (Φ_{i5j}) , являющимися простыми множителями формулы Φ_i . Предметный символ x_{Φ_5} связывается с элементами обозначаемого им множества атомарными формулами с предикатом P_α .

Для МЯИП справедливо

Утверждение 2. Любой квазиграф может быть закодирован конъюнкцией атомарных формул МЯИП [3]. При этом вершины квазиграфа соответствуют предметным символам, метки связей квазиграфа — пре-

дикатным символам, связи квазиграфа — символам вхождений предикатов в атомарные формулы.

Для графового кода справедливо

Утверждение 3. Любая семантическая сеть (в общем случае представляющая собой квазиграф) может быть преобразована в семантическую сеть, являющуюся текстом графового кода [3].

Из утверждений 1—3 следует

Утверждение 4. Любая формула МЯИП представима в виде эквивалентного ГК-графа.

В работах [10, 11] нами рассмотрено использование языка исчисления ГК-графов в качестве языка записи математических текстов.

Сравнительный анализ языка исчисления ГК-графов показывает его эффективность, обусловленную, во-первых, близостью его текстов к семантическому описанию предметных областей (например, к семантическому представлению математических текстов) и, во-вторых, разностью средств самоописания, которые выражаются, в частности, в том, что формула языка исчисления ГК-графов представляет собой некоторую систему четырех метаотношений ($P_\exists, P_\Phi, P_\vee, P_\rightarrow$), заданную на некотором множестве других формул этого языка.

Проиллюстрируем предложенный способ записи логических формул на ряде простых примеров.

Пример 1. Точка A инцидентна прямой B . $P_{\text{тчк}}(x_A) \wedge P_{\text{прям}}(x_B) \wedge P_{\text{инц}}(x_A, x_B)$. В результате введения метапредикатов получим $P_\Phi(x_{\text{Г.БЗ}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.БЗ}}, P_{\text{тчк}}, P_{\text{прям}}, P_{\text{инц}}, P_{\text{тчк}}(x_A), P_{\text{прям}}(x_B), P_{\text{инц}}(x_A, x_B))$. В результате сведения предикатов к предикату P_\exists получим

$$P_\exists(P_\Phi, P_\Phi^{x_{\text{Г.БЗ}}}) \wedge P_\exists(P_\Phi^{x_{\text{Г.БЗ}}}, P_\exists^{M_{\text{БЗ}}, x_{\text{Г.БЗ}}}) \wedge P_\exists(M_{\text{БЗ}}, x_{\text{Г.БЗ}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.БЗ}}, P_{\text{тчк}}, P_{\text{прям}}, P_{\text{инц}}, P_\exists(P_{\text{тчк}}, x_A), P_\exists(P_{\text{прям}}, x_B), P_\exists(P_{\text{инц}}, P_{\text{инц}}^{x_A, x_B}), P_\exists(P_{\text{инц}}^{x_A, x_B}, x_A, x_B)).$$

Примечание 1. В последней формуле все предикатные символы (кроме P_\exists) и все символы вхождений предикатов (кроме P_\exists^i) интерпретируются как предметные символы.

Примечание 2. $M_{\text{БЗ}}$ — знак множества первых компонентов всевозможных P_Φ -формул.

Пример 2. Существует тройка точек, инцидентных некоторой прямой.

$$\exists x_{\text{т1}}, x_{\text{т2}}, x_{\text{т3}}, x_{\text{п1}} (P_{\text{тчк}}(x_{\text{т1}}) \wedge P_{\text{тчк}}(x_{\text{т2}}) \wedge P_{\text{тчк}}(x_{\text{т3}}) \wedge P_{\text{прям}}(x_{\text{п1}}) \wedge P_{\text{инц}}(x_{\text{т1}}, x_{\text{п1}}) \wedge P_{\text{инц}}(x_{\text{т2}}, x_{\text{п1}}) \wedge P_{\text{инц}}(x_{\text{т3}}, x_{\text{п1}})).$$

После сведения квантора существования к метапредикатам получим

$$P_\Phi(x_{\text{Г.БЗ}}, x_{\text{Г.Э}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.БЗ}}, P_{\text{тчк}}, P_{\text{прям}}, P_{\text{инц}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.Э}}, P_\Phi^{x_{\text{Г.Э1.БЗ}}}) \wedge P_\Phi(x_{\text{Г.Э1.БЗ}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.Э1.БЗ}}, P_{\text{тчк}}(x_{\text{т1}}), P_{\text{тчк}}(x_{\text{т2}}), P_{\text{тчк}}(x_{\text{т3}}), P_{\text{прям}}(x_{\text{п1}}), P_{\text{инц}}(x_{\text{т1}}, x_{\text{п1}}), P_{\text{инц}}(x_{\text{т2}}, x_{\text{п1}}), P_{\text{инц}}(x_{\text{т3}}, x_{\text{п1}})).$$

После сведения всех предикатов к предикату P_\exists получим

$$P_\exists(P_\Phi, P_\Phi^{x_{\text{Г.БЗ}}, x_{\text{Г.Э}}}) \wedge P_\exists(P_\Phi^{x_{\text{Г.БЗ}}, x_{\text{Г.Э}}}, P_\exists^{M_{\text{БЗ}}, x_{\text{Г.БЗ}}}, P_\exists^{M_{\text{Э}}, x_{\text{Г.Э}}}) \wedge P_\exists(M_{\text{БЗ}}, x_{\text{Г.БЗ}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.БЗ}}, P_{\text{тчк}}, P_{\text{прям}}, P_{\text{инц}}) \wedge P_\exists(M_{\text{Э}}, x_{\text{Г.Э}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.Э}}, P_\Phi^{x_{\text{Г.Э1.БЗ}}}) \wedge P_\exists(P_\Phi, P_\Phi^{x_{\text{Г.Э1.БЗ}}}) \wedge P_\exists(P_\Phi^{x_{\text{Г.Э1.БЗ}}}, P_\exists^{M_{\text{БЗ}}, x_{\text{Г.Э1.БЗ}}}) \wedge P_\exists(M_{\text{БЗ}}, x_{\text{Г.Э1.БЗ}}) \wedge P_\exists(x_{\text{Г.Э1.БЗ}}, P_\exists(P_{\text{тчк}}, x_{\text{т1}}), P_\exists(P_{\text{тчк}}, x_{\text{т2}}), P_\exists(P_{\text{тчк}}, x_{\text{т3}}), P_\exists(P_{\text{прям}}, x_{\text{п1}}), P_\exists(P_{\text{инц}}, (P_{\text{инц}}^{x_{\text{т1}}, x_{\text{п1}}}) \wedge P_\exists(P_{\text{инц}}^{x_{\text{т1}}, x_{\text{п1}}}, x_{\text{т1}}, x_{\text{п1}}) \wedge P_\exists(P_{\text{инц}}, P_{\text{инц}}^{x_{\text{т2}}, x_{\text{п1}}}) \wedge P_\exists(P_{\text{инц}}^{x_{\text{т2}}, x_{\text{п1}}}, x_{\text{т2}}, x_{\text{п1}}) \wedge P_\exists(P_{\text{инц}}, P_{\text{инц}}^{x_{\text{т3}}, x_{\text{п1}}}) \wedge P_\exists(P_{\text{инц}}^{x_{\text{т3}}, x_{\text{п1}}}, x_{\text{т3}}, x_{\text{п1}})).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Голенков В. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 1, с. 29.
2. Голенков В. В., Сидоренко В. П. Графовый код ГК1: принципы построения.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3033-80. Деп. от 14.07.80.
3. Голенков В. В. Графовая модель баз данных.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3697-81. Деп. от 23.07.81.
4. Голенков В. В. Язык семантических сетей.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3216-81. Деп. от 01.07.81.
5. Семантический код в линейном и нелинейном представлении.— Минск, 1980, с. 40.
6. Кибернетический сборник, новая серия.— М., 1979, вып. 16, с. 171.
7. Новиков П. С. Элементы математической логики, 2-е изд.— М., 1973.
8. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Логические исчисления и формализация арифметики.— М., 1979.
9. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М., 1970.
10. Голенков В. В., Астрейко А. П. Представление математических текстов в виде графовых грамматик, ч. 1.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3032-80. Деп. от 14.07.80.
11. Голенков В. В., Астрейко А. П. Представление математических текстов в виде графовых грамматик, ч. 2.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3032-80. Деп. от 14.07.80.

Поступила в редакцию
24.03.81.

Кафедра ЭММ

УДК 681.142.01

А. А. КОЛЯДА

УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ РАЗНЫХ ЗНАКОВ В ЯДЕРНО-МОДУЛЯРНОМ КОДЕ

С целью упрощения модулярной арифметики в [1] введены ядерно-модулярные системы счисления (ЯМСС), представляющие собой некоторую модификацию нормированных систем в остатках [2]. Отличительной особенностью ЯМСС является простота выполнения немодульных операций таких, как определение знака числа, вычисление основной позиционной характеристики ядерно-модульного кода (поправки Амербаева), формирование признака переполнения и др. [1, 3].

Настоящая работа посвящена операциям умножения чисел разных знаков (целых чисел и дробей), представленных в ЯМСС, и формирования признака мультипликативного переполнения. Предлагаемые методы выполнения указанных операций основаны на подходе, применяемом в [3], где рассмотрен случай неотрицательных операндов.

Ниже используются терминология и обозначения работы [3].

В ЯМСС целое число $A' \in D_n = \left[-\frac{P^{(n)}}{2}, \frac{P^{(n)}}{2} \right)$ представляется ядерно-модулярным кодом числа $A = |A'|_{P^{(n)}} \in D_n = [0, P^{(n)})$, т. е. $A' \div \div (\alpha_{1, n-1}, \dots, \alpha_{n-1, n-1}, \bar{\rho}_r(A))$, где $\bar{\rho}_n(A) = |\rho_n(A)|_{P^n}$, $\rho_n(A)$ — нормированное ядро числа $A \in D_n$ [4], определяемое соотношением

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} P_{i, n-1} \cdot \alpha_{i, n-1} + \rho_n(A) \cdot P^{(n-1)}. \quad (1)$$

Из (1) можно получить [1, 4] следующие две формулы:

$$\rho_n(A) = \left| \alpha_{n, n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{i, n-1}}{P^i} \right|_{P^n} \quad (2), \quad \rho_n(A) = \bar{\rho}_n(A) - p_n \cdot \tau(A), \quad (3)$$

где $\tau(A)$ — поправка Амербаева, принимающая лишь два значения 0 или 1, если только $p_n \geq n-2$. Подставляя (3) в (1), находим

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} P_{i, n-1} \cdot \alpha_{i, n-1} + \bar{\rho}_n(A) \cdot P^{(n-1)} - \tau(A) \cdot P^{(n)}. \quad (4)$$

Легко проверить, что для $A' \in D'_n$ справедливо представление

$$A' = \left| A + \frac{P^{(n)}}{2} \right|_{P^{(n)}} - \frac{P^{(n)}}{2}. \quad (5)$$

Так как ядерно-модулярный код числа $\left| A + \frac{P^{(n)}}{2} \right|_{P^{(n)}}$ имеет вид

$(\alpha_{1, n-1}, \dots, \alpha_{n-1, n-1}, \left| \bar{\rho}_n(A) + \frac{P_n}{2} \right|_{P_n})$ (см. формулу (2)), то из (4) и (5) получим

$$A' = \sum_{i=1}^{n-1} P_{i, n-1} \cdot \alpha_{i, n-1} + I_{n-1}(A') \cdot P^{(n-1)}, \quad (6)$$

где

$$I_{n-1}(A') = \left| \bar{\rho}_n(A) + \frac{P_n}{2} \right|_{P_n} - \frac{P_n}{2} - P_n \cdot \tau \left(\left| A + \frac{P^{(n)}}{2} \right|_{P^{(n)}} \right). \quad (7)$$

Соотношения (6) и (7) показывают, что любое число $A' \in D'_n$ сравнительно легко может быть преобразовано из ядерно-модулярного кода в код так называемых позиционно-модулярных систем счисления (ПМСС) (обобщенных систем остаточных классов [5]). Благодаря этому для умножения чисел в ЯМСС применимы методы, разработанные для ПМСС [5, 6].

Из формулы (7) и последующего изложения видно, что ключевую роль при реализации указанного подхода к выполнению рассматриваемых операций в ЯМСС играет устройство формирования позиционных характеристик ядерно-модулярного кода [1], которое по входному коду $(\alpha_{1, n-1}, \dots, \alpha_{n-1, n-1}, \bar{\rho}_n(A))$ числа $A' \in D'_n$ определяет поправку $\tau(A)$ и знак числа A' , определяемый как $S(A') = \left\lfloor \frac{2|A'|_{P^{(n)}}}{P^{(n)}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2A}{P^{(n)}} \right\rfloor$.

Итак, пусть требуется перемножить два числа A' и B' из D'_n , ядерно-модулярные коды которых суть $(\alpha_{1, n-1}, \dots, \alpha_{n-1, n-1}, \bar{\rho}_n(A))$, и $(\beta_{1, n-1}, \dots, \beta_{n-1, n-1}, \bar{\rho}_n(B))$ соответственно ($A = |A'|_{P^{(n)}}$, $B = |B'|_{P^{(n)}}$, а также сформировать признак переполнения

$$\Pi = \begin{cases} 0, & \text{если } C' \in D_n \\ 1, & \text{если } C' \notin D_n, \end{cases} \quad (8)$$

где $C' = A' \cdot B'$.

Обозначим через $(\gamma_{1, n-1}, \dots, \gamma_{n-1, n-1}, \bar{\rho}_n(C))$ ядерно-модулярный код числа $C = |C'|_{P^{(n)}}$. Очевидно, $\gamma_{i, n-1} = |P_{i, n-1} \cdot \alpha_{i, n-1} \cdot \beta_{i, n-1}|_{P_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), а для нахождения $\bar{\rho}_n(C)$ достаточно воспользоваться формулой (4), что дает

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n(C) = & \left| P^{(n)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\alpha_{j, n-1}}{P_j} \right|_{P_n} + \bar{\rho}_n(A) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\beta_{j, n-1}}{P_j} \right|_{P_n} + \bar{\rho}_n(B) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{j, n-1}}{P_j} \right|_{P_n P_n} \right. \end{aligned} \quad (9)$$

При отсутствии переполнения код $(\gamma_{1, n-1}, \dots, \gamma_{n-1, n-1}, \bar{\rho}_n(C))$, определяемый полученными соотношениями, является искомым.

Перейдем к вопросу формирования признака мультипликативного переполнения. Представим C' в виде

$$C' = \sum_{i=1}^{n-1} P_{i, n-1} \cdot \gamma_{i, n-1} + \bar{\rho}_n(C) \cdot P^{(n-1)} + G_n(C') \cdot P^{(n)}, \quad (10)$$

где $G_n(C)$ — некоторое целое число, называемое ядерным интервальным индексом числа C' . Вычитая и добавляя в правой части (10) вели-

чину $\tau(C \cdot P^{(n)})$, в соответствии с формулой (4), будем иметь $C' = C + (\tau(C) + G_n(C')) \cdot P^{(n)}$. Разделив последнее соотношение на $P^{(n)}/2$ и взяв затем от обеих частей антье, получим

$$M_{C'} = \left[\frac{2C'}{P^{(n)}} \right] = S(C') + 2(\tau(C) + G_n(C')), \quad (11)$$

где $S(C') = \left[\frac{2C'}{P^{(n)}} \right]$ — знак числа C' . Очевидно, (9) эквивалентно соотношению $\Pi = \begin{cases} 0, & \text{если } M_{C'} = -1 \text{ или } M_{C'} = 0 \\ 1, & \text{если } M_{C'} \neq -1 \text{ и } M_{C'} \neq 0. \end{cases}$ Следовательно, задача формирования признака мультипликативного переполнения свелась фактически к вычислению величины $M_{C'}$. Представляя число C' в виде

$$C' = \sum_{i=1}^{n-1} P_{i, n-1} \cdot \gamma_{i, n-1} + I_{n-1}(C') \cdot P^{n-1}, \quad (12)$$

где $I_{n-1}(C')$ — некоторое целое число, называемое ранговым интервальным индексом числа C' , и, сравнивая (12) с (10), заключаем, что $I_{n-1}(C') = \bar{\rho}_n(C) + p_n \cdot G_n(C')$. Находя отсюда $G_n(C')$ и подставляя в (11), получаем

$$M_{C'} = S(C') + 2 \left(\tau(C') + \frac{1}{P_n} (I_{n-1}(C') - \bar{\rho}_n(C)) \right). \quad (13)$$

Для вычисления $I_{n-1}(C')$ достаточно представить исходные операнды A' и B' в виде (6), предварительно определив их ранговые интервальные индексы $I_{n-1}(A')$ и $I_{n-1}(B')$ по формуле (7) и применить затем формулы, разработанные для ПМСС [5, 6].

С целью выбора оснований модулярной системы счисления (МСС), необходимой для реализации (13), оценим величину $M_{C'}$. Из (11) имеем $-P^{(n)}/2 < M_{C'} \leq P^{(n)}/2$. Следовательно, мощность диапазона искомой МСС должна быть больше, чем $P^{(n)}$. В качестве модулей этой системы выберем $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_{n+1}$, где $p_{n+1} > p_n$ и $(p_{n+1}, p_i) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Используя (13) и соотношения для $I_{n-1}(C')$, приводимые в (5), (6), запишем расчетные соотношения для модулярного кода числа $M_{C'}$ в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \mu_{i, n-1} = |M_{C'} \cdot P_{i, n-1}^{-1}|_{p_i} = & \left| 2 \left(P_{i, n-1} \cdot \alpha_{i, n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} P_{i, n}^{-1} \frac{\beta_{j, n-1}}{p_j} \right) \right) \right|_{p_i} + \left| P_{i, n}^{-1} \left(\bar{\rho}_n(B) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{p_n}{2} \left| p_n - \frac{p_n}{2} \right|_{p_i} \right) + P_{i, n-1} \cdot \beta_{i, n-1} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} \left| P_{i, n}^{-1} \frac{\alpha_{j, n-1}}{p_j} \right|_{p_i} + \left| P_{i, n}^{-1} \left(\bar{\rho}_n(A) + \frac{p_n}{2} \right) \right|_{p_n} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{p_n}{2} \right) \right|_{p_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} \left| P_{i, n}^{-1} \frac{\gamma_{j, n-1}}{p_j} \right|_{p_i} + \left| P_{i, n}^{-1} \left[\frac{P_{i, n-1} \cdot \alpha_{i, n-1} \cdot \beta_{i, n-1}}{P_i} \right] \right|_{p_i} - \\ & - \left| P_{i, n}^{-1} \cdot \bar{\rho}_n(C) \right|_{p_i} - \alpha_{i, n-1} \tau \left(\left| B + \frac{P^{(n)}}{2} \right|_{P^{(n)}} \right) - \beta_{i, n-1} \cdot \tau \left(\left| A + \frac{P^{(n)}}{2} \right|_{P^{(n)}} \right) + \\ & + \left| P_{i, n}^{-1} \cdot \tau(C) \right|_{p_i} + \left| P_{i, n}^{-1} \cdot S(C') \right|_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} = |M_{C'}|_{p_{n+1}} = & \left| 2 \left(P^{(n)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\alpha_{j, n-1}}{p_j p_n} \right|_{p_{n+1}} + \left| \frac{1}{p_n} \left(\bar{\rho}_n(A) + \frac{p_n}{2} \right) \right|_{p_n} - \frac{p_n}{2} \right) \right|_{p_{n+1}} - \right. \\ & - \tau \left(\left| A + \frac{P^n}{2} \right|_{P^{(n)}} \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\beta_{j, n-1}}{p_j p_n} \right|_{p_{n+1}} + \left| \frac{1}{p_n} \left(\bar{\rho}_n(B) + \frac{p_n}{2} \right) \right|_{p_n} - \frac{p_n}{2} \right) \right|_{p_{n+1}} - \\ & - \tau \left(\left| B + \frac{P^{(n)}}{2} \right|_{P^{(n)}} \right) - \sum_{j=1}^n \left| \frac{\gamma_{j, n-1}}{p_j p_n} \right|_{p_{n+1}} - \left| \frac{\bar{\rho}_n C}{p_n} \right|_{p_{n+1}} + \tau(C) + S(C') \right|_{p_{n+1}}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\bar{\rho}_n(C)$ вычисляется по формуле (9).

В заключение остановимся кратко на операции умножения в ЯМСС двух дробей $\frac{2A'}{p^{(n)}}$ и $\frac{2B'}{p^{(n)}}$, где A' и B' из D'_n . Эта операция состоит в округлении произведения $\frac{2A}{p^{(n)}} \cdot \frac{2B}{p^{(n)}}$, например, до величины $\frac{2}{p^n} \times \left[\frac{2C'}{p^n} \right]$, где $C' = A' \cdot B'$. Так как $\left[\frac{2C'}{p^{(n)}} \right] = M_{C'}$ (см. формулу (11)), то задача сводится к вычислению ядерно-модулярного кода $\mu_{1, n-1}, \dots, \mu_{n-1, n-1}$, $\bar{\rho}_n(M_{C'})$ числа $M_{C'}$. Первые $n-1$ цифр этого кода определяются по формуле (14), а для вычисления $\bar{\rho}_n(M_{C'})$ можно воспользоваться следующим соотношением: $\bar{\rho}_n(M_{C'}) = \left\| \frac{\mu_{n+1}}{p^{n-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i, n-1}}{p_i} \right\|_{p_{n+1} | p_n}$, где μ_{n+1} — вычет, определяемый по формуле (15), при этом модуль должен удовлетворять условию $p_{n+1} \geq p_n + n - 2$ [3].

Проверка показывает, что в рамках предлагаемых методов при соответствующей структуре арифметического устройства [7] умножение двух целых чисел вместе с анализом на переполнение может быть выполнено за $7 + \lceil \log_2 n \rceil$ модульных операций, а умножение двух дробей — за $9 + 2 \lceil \log_2 n \rceil$ модульных операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляда А. А. Алгоритмы формирования позиционных характеристик ядерно-модулярного кода: Математическое обеспечение АСПР.— Минск, 1981.
2. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики.— Алма-Ата, 1976.
3. Коляда А. А., Кравцов В. К., Смирнов Н. А.— Автоматика и вычислительная техника, 1981, № 3.
4. Коляда А. А.— Кибернетика, 1981, № 3.
5. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1, с. 6.
6. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 3, с. 3.
7. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, 1981, № 1, с. 19.

Поступила в редакцию
13.04.81.

НИИ ПФП

УДК 01.04 : 621.378

С. А. ЗЕНЧЕНКО

ЛАЗЕР НА АЛЮМО-ИТТРИЕВОМ ГРАНАТЕ С НЕОДИМОМ С ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ВЫХОДОМ

Модуляция лазерного излучения наиболее эффективно осуществляется с помощью внутривибраторных устройств, которые требуют в основном линейной поляризации излучения. Наведенное двулучепреломление в кристаллах активных элементов, вызываемое термическими напряжениями, приводит к сильному уменьшению выходной мощности лазеров при использовании внутривибраторных поляризаторов [1—3]. При больших уровнях накачки активного элемента мощность поляризованного излучения на выходе лазера составляет 20—30 % мощности неполяризованного излучения [2, 3]. Предложены различные схемы компенсации наведенного двулучепреломления, связанные с применением дополнительных пассивных и активных элементов [4—6] или специальных внутривибраторных элементов [7]. Однако в указанных работах не приводятся данные по степени поляризации выходного излучения и зависимости выходной мощности поляризованного излучения от накачки.

Целью настоящей работы было исследование энергетических и поляризационных характеристик АИГ: Nd лазера непрерывного действия с

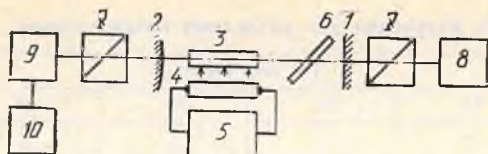
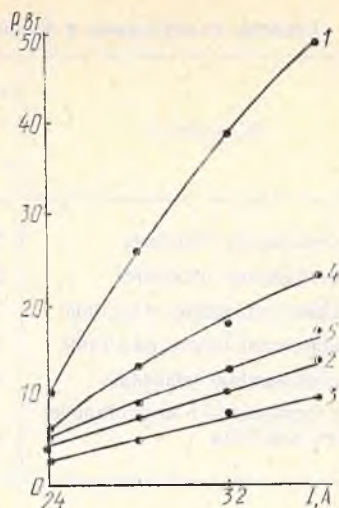


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки. Пояснение см. в тексте

Рис. 2. Зависимости мощности выходного излучения от тока накачки:

1 — неполяризованное излучение; 2 — одна стеклянная пластина в резонаторе под углом Брюстера; 3 — три стеклянные пластины; 4 — одна кварцевая пластина; 5 — три кварцевые пластины



пластинами под углом Брюстера в резонаторе в качестве поляризатора, а также исследование возможности компенсации наведенного двулучепреломления с помощью пассивных анизотропных элементов, используемых в качестве поляризаторов.

Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.

Резонатор лазера образован плоским выходным 1 и «глухим» выпуклым 2 зеркалами. В эксперименте использовались кристаллы АИГ: Nd $\varnothing 5 \times 50$ мм в цилиндрическом и эллиптическом осветителях и кристалл $\varnothing 5 \times 100$ мм в эллиптическом осветителе. Выходную мощность лазера регулировали изменением рабочего тока лампы с помощью источника питания 5. Поляризаторами служили плоскопараллельные пластинки из стекла и кристаллического кварца, вырезанные вдоль оптической оси Федорова, что позволяло точно устанавливать угол Брюстера и менять ориентацию осей кварцевой пластины. Так как пластина под углом Брюстера является частичным поляризатором [8], для увеличения степени поляризации в резонаторе устанавливали несколько пластин. Мощность излучения на выходе лазера и степень поляризации контролировались с помощью анализатора 7 и измерителя мощности 8. Интенсивность излучения со стороны «глухого» зеркала измерялась фотоприемником 9 и измерительным прибором 10.

На рис. 2 показана зависимость мощности выходного оптического излучения от тока накачки для различных поляризаторов в резонаторе лазера с кристаллом АИГ: Nd $\varnothing 5 \times 100$ мм, в котором была получена наибольшая выходная мощность генерации. Степень поляризации излучения R рассчитывали по формуле [9]: $R = \frac{P_{II} - P_I}{P_{II} + P_I}$, где P_{II} и P_I — мощность излучения на выходе анализатора при параллельных и скрещенных внутрирезонаторном поляризаторе и анализаторе.

Как видно из рис. 2, применение в качестве внутрирезонаторных поляризаторов пластин из кристаллического кварца позволяет получить на выходе лазера большую мощность поляризованного излучения. При этом увеличивается и R (см. таблицу). С увеличением мощности накачки R уменьшается; тем не менее, в случае анизотропного поляризатора из кристаллического кварца P и R остаются выше, чем в случае изотропных стеклянных пластин. Как и следовало ожидать, с увеличением числа пластин R возрастает. Степень поляризации излучения на выходе «глухого» зеркала резонатора такая же, как и на выходном зеркале. Направление поляризации оказалось ортогональным направлению, задаваемому поляризационной пластиной как для изотропных, так и для анизотропных пластин.

Степень поляризации и мощность излучения для различных поляризаторов

Поляризатор	Ток накачки, А							
	24		28		32		36	
	<i>P</i> , Вт	<i>R</i>	<i>P</i> , Вт	<i>R</i>	<i>P</i> , Вт	<i>R</i>	<i>P</i> , Вт	<i>R</i>
1 стеклянная пластина	5,5	0,80	8,0	0,76	10,0	0,72	16,0	0,68
3 стеклянные пластины	3,5	0,89	4,0	0,88	7,0	0,80	9,5	0,76
1 кристаллическая пластина	5,5	0,89	12,0	0,88	16,0	0,77	23,0	0,73
3 кристаллические пластины	5,2	0,94	8,0	0,92	12,0	0,86	17,0	0,85
2 стеклянные пластины	4,0	0,86	5,2	0,85	8,0	0,76	12,0	0,75
2 стеклянные + 1 кристаллическая пластины	5,0	0,94	6,0	0,87	9,5	0,85	14,0	0,85

Падение *P* и *R* на выходе лазера с повышением мощности накачки объясняется возрастанием величины наведенного двулучепреломления [2]: $\Delta n = (n_\varphi - n_r) = 2,19 \cdot 10^{-6} \frac{P_a}{\pi L} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2$, где P_a — мощность, рассеиваемая в активном элементе длиной *L* и радиусом r_0 ; n_φ и n_r — тангенциальная и радиальная составляющие показатели преломления; *r* — расстояние от центра кристалла.

Возникновение наведенного двулучепреломления связано с тем, что оптически изотропные материалы под действием механических или термических напряжений становятся анизотропными. Изменение величины наведенного двулучепреломления приводит к изменению фазовой задержки в активном элементе:

$$\Gamma_{\Delta n} = \frac{2\pi L}{\lambda} \Delta n, \quad (1)$$

и в результате поляризация, ортогональная рабочей, испытывает большие потери на внутриврезонаторном поляризаторе.

Увеличение *P* и *R* в случае анизотропной поляризационной пластины в резонаторе связано с тем, что такой поляризатор одновременно является компенсатором фазового сдвига в активном элементе. Для пластины, вырезанной вдоль оптической оси и установленной под углом Брюстера, можно показать, что фазовая задержка в ней имеет вид:

$$\Gamma_n = \frac{2\pi l}{\lambda} \Delta n_n \alpha(\varphi) \frac{(1+n^2)^{1/2}}{n}, \quad (2)$$

где *l* — толщина пластины; Δn_n — разность показателей преломления материала пластины; $\alpha(\varphi)$ — функция, зависящая от угла поворота пластины вокруг нормали к плоскости пластины и имеющая вид

$$\alpha(\varphi) = \left[\left(\sin^2 \varphi - \frac{n^2}{1+n^2} \cos^2 \varphi \right)^2 + \frac{n^2}{1+n^2} \sin^2 2\varphi \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Угол поворота φ отсчитывается от положения, в котором направление «быстрой» оси показателя преломления пластины лежит в плоскости поляризации.

Метод матриц Джонса [9] позволяет показать, что для лазера с анизотропным элементом и поляризационной пластиной условие сохранения плоскости поляризации выполняется для тех случаев, когда комбинация активный элемент — анизотропная поляризационная пластина за проход в одном направлении эквивалентна полуволновой фазовой пластинке при совпадении ориентации «быстрых» осей или обладает только амплитудной анизотропией, когда «быстрые» оси развернуты на 90°. При этом в анизотропном поляризаторе должен происходить поворот пло-

скости поляризации за счет дополнительного набега фаз или компенсация фазового сдвига, возникающего в активном элементе. Изменяя угол поворота пластины, а следовательно, и фазовую задержку в ней, можно менять фазовую задержку в резонаторе, являющуюся суммой задержек в активном элементе $\Gamma_{\Delta\theta}$ (1) и анизотропном поляризаторе Γ_{Π} (2). То, что такой поляризатор является и компенсатором фазового сдвига, подтверждается также тем, что при использовании в качестве поляризатора стопы из двух стеклянных и одной кварцевой пластин (см. таблицу) происходит увеличение не только степени поляризации, но и выходной мощности.

Зависимость фазового сдвига в резонаторе от угла поворота анизотропного поляризатора вокруг нормали к его поверхности приводит к тому, что возможен такой режим работы лазера, когда плоскость поляризации выходного излучения не будет совпадать с плоскостью, задаваемой поляризатором. Поэтому следует тщательно контролировать плоскость и степень поляризации излучения.

Таким образом, использование в качестве внутррезонаторного поляризатора анизотропной пластины из кристаллического кварца под углом Брюстера позволяет увеличить мощность поляризованного излучения и степень поляризации излучения на выходе лазера. Поворот такого поляризатора дает возможность подстраивать выходную мощность лазера при изменении условий накачки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Foster J. D., Osterink L. M.—J. Appl. Phys., 1970, v. 41, № 9, p. 3656.
2. Koechner W., Rice D. K.—IEEE J. Quant. Electronics., 1970, v. 6, № 9, p. 557.
3. Kagg M. A.—Appl. Opt., 1971, v. 10, № 4, p. 893.
4. Дишингтон, Хук, Хилберг.—ТИИЭР, 1967, т. 55, № 11, с. 289.
5. Евдокимова В. Г., Мак А. А., Сомс Л. Н., Шафаростов А. И.—Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 9, с. 1915.
6. Scott W. C., de Wit M.—Appl. Phys. Lett., 1971, v. 18, № 1, p. 3.
7. Михалевиц В. Г., Шипуло Г. П.—Квантовая электроника, 1971, т. 1, № 2, с. 455.
8. Ландсберг Г. С. Оптика.—М., 1976.
9. Шерклифф У. Поляризованный свет / Под ред. Н. Д. Жевандрова.—М., 1965 (пер. с англ.).

Поступила в редакцию
28.04.81.

НИИ ПФП

УДК 535

Т. А. ПЕРКОВСКИЙ

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СВЕТА СЛОЕМ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ

Многообразные оптические свойства холестерических жидких кристаллов (ХЖК), широкие возможности их практического использования привлекают постоянное внимание исследователей [1—5]. Необычные оптические свойства ХЖК можно объяснить на основе плосковинтовой модели [6—8], однако детальный анализ закономерностей взаимодействия света с ХЖК даже в случае нормального падения, для которого получены точные решения [5, 9], требует численных расчетов.

В настоящей статье проведено численное исследование зависимости коэффициентов отражения и пропускания и поляризации отраженного и прошедшего света от длины волны и поляризации света, падающего нормально на слой ХЖК. Для вывода расчетных формул использованы результаты теоретического исследования плоскоклонных анизотропных и гиротропных сред, полученные в [9—11] с помощью обобщенных тензорных операторов поверхностных импедансов. Слой ХЖК можно рассмат-

ривать как систему, состоящую из большого числа тонких, плоских, анизотропных слоев, повернутых друг относительно друга вокруг оптической оси на некоторый угол. Соответствующие тензоры отражения r и пропускания d [9—11] позволяют выразить напряженность магнитных полей отраженной \bar{H}^r и прошедшей \bar{H}^d волн через напряженность магнитного поля \bar{H}^i падающей волны, определить коэффициенты отражения R и пропускания D слоя ХЖК и поляризацию отраженной и прошедшей волн:

$$\bar{H}^r = r\bar{H}^i, \quad \bar{H}^d = d\bar{H}^i; \quad (1)$$

$$R = \frac{|\bar{H}^r|^2}{|\bar{H}^i|^2}, \quad D = \frac{|\bar{H}^d|^2}{|\bar{H}^i|^2}; \quad (2)$$

$$\zeta_i = \frac{H_y^i}{H_x^i}, \quad \zeta_r = \frac{H_y^r}{H_x^r}, \quad \zeta_d = \frac{H_y^d}{H_x^d}. \quad (3)$$

Поляризацию волн описывает комплексная величина ξ [12]: правой (левой) поляризации соответствует $\text{Im } \xi > 0$ ($\text{Im } \xi < 0$), при круговой поляризации $\xi = \pm i$, при линейной поляризации ξ — действительное число. В формулах (3) ξ_i , ξ_r , ξ_d — комплексные величины, характеризующие поляризацию падающей, отраженной и прошедшей волн соответственно, H_x^i , H_y^i , H_x^r , H_y^r , H_x^d , H_y^d — проекции векторов \bar{H}^i , \bar{H}^r , \bar{H}^d на оси OX и OY выбранной прямоугольной декартовой системы координат, ось OZ которой направлена перпендикулярно к слою ХЖК, вдоль оси спирали. В этом базисе тензор диэлектрической проницаемости ХЖК записывается в виде [13] (спираль ХЖК левая):

$$\epsilon(z) = \begin{pmatrix} \epsilon_\tau(1 + \delta \cos 2\Theta), & -\epsilon_\tau \delta \sin 2\Theta, & 0 \\ -\epsilon_\tau \delta \sin 2\Theta, & \epsilon_\tau(1 - \delta \cos 2\Theta), & 0 \\ 0, & 0, & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\epsilon_\tau = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$; $\delta = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$; $\Theta = \frac{2\pi}{P}$; ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 — главные значения тензора диэлектрической проницаемости; P — шаг спирали ХЖК.

Исследования проводились как для отдельного слоя ХЖК, так и для слоя ХЖК, помещенного между двумя одинаковыми прозрачными плоскопараллельными пластинками толщиной $l = 1$ мм, абсолютный показатель преломления которых $n = 1,5$ (что обычно имеет место при проведении экспериментов), в интервале длин волн от $\lambda_1 = 0,3$ мкм до $\lambda_2 = 0,8$ мкм с шагом $\Delta\lambda_0 = 0,001$ мкм для двух значений толщины $l_1 = 20 \cdot P$ и $l_2 = 20,1 \cdot P$ слоя ХЖК. Численные значения констант, входящих в тензор диэлектрической проницаемости (4), выбраны равными $\epsilon_\tau = 2,7225$, $\delta = 0,05$ (как у смеси, состоящей из 42 % МББА и 58 % холестерилолеилкарбоната [14]), $P = 0,4$ мкм (при таком выборе P область селективного отражения находится в видимой области спектра). Предполагалось, что главные значения тензора диэлектрической проницаемости, шаг спирали и показатель преломления пластинок не зависят от длины волны падающего света. Расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1022, время счета для одного набора параметров ~ 2 с.

Результаты проведенного исследования, наряду с известными оптическими свойствами ХЖК (наличие области селективного отражения, осциллирующий характер коэффициентов отражения и пропускания и т. д., рис. 1—3) [1—5, 15], позволили выявить особенности оптических свойств исследованной модели ХЖК. Так, установлено, что в области длин волн от 0,647 до 0,672 мкм (область селективного отражения) падающий свет с левой круговой поляризацией отражается не полностью (см. рис. 1); около 5 % его проходит через кристалл, при этом прошедший свет имеет правую эллиптическую поляризацию. В отраженном свете изменение поляризации с левой на правую происходит в нескольких полосах длин волн: главная полоса расположена в интервале длин волн

0,638 — 0,682 мкм; слева и справа от нее расположены побочные полосы, ширина которых убывает при удалении от главной полосы. Коэффициент прохождения света, имеющего правую круговую поляризацию, в области селективного отражения составляет около 95 % (см. рис. 1). Для всех исследованных длин волн падающего света круговой поляризации отраженный и прошедший свет имеет эллиптическую поляризацию.

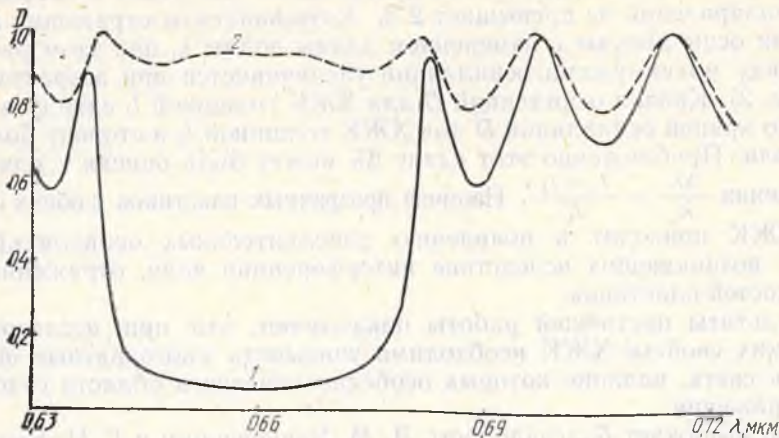


Рис. 1. Зависимость коэффициентов прохождения света круговой поляризации через слой ХЖК от длины волны:

1 — правая, 2 — левая поляризация (спираль ХЖК левая. $P=0,4$ мкм, толщина слоя ХЖК $l_1=8$ мкм; то же на рис. 2—3)

Как известно, эллиптически поляризованную волну можно представить в виде суммы левой и правой круговых волн. Следовательно, независимо от направления круговой поляризации падающей волны отраженный и прошедший свет состоит из двух круговых волн, поляризованных в противоположных направлениях. Приведенные результаты показывают, что при нормальном падении света на слой ХЖК в последнем происходит возбуждение круговой волны, направление поляризации которой противоположно направлению поляризации падающей волны. Если направление поляризации падающего света совпадает с направлением вращения спирали ХЖК, то в области селективного отражения амплитуды

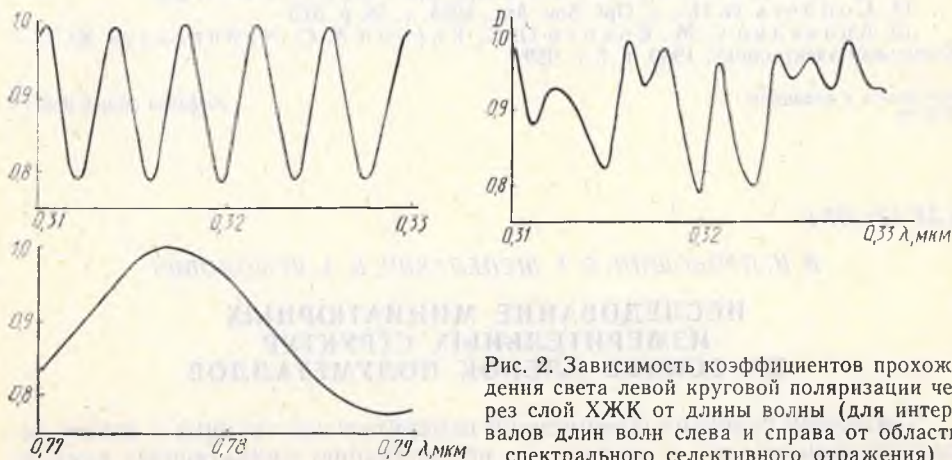


Рис. 2. Зависимость коэффициентов прохождения света левой круговой поляризации через слой ХЖК от длины волны (для интервалов длин волн слева и справа от области спектрального селективного отражения)

Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения света левой круговой поляризации через слой ХЖК, помещенный между двумя прозрачными пластинами, от длины волны (толщина пластинок $l=1$ мм)

ды отраженной и прошедшей круговых волн, имеющих противоположное направление круговой поляризации, возрастают. Это явление можно, по-видимому, объяснить влиянием многократных переотражений света внутри слоя ХЖК.

Вне области селективного отражения коэффициенты отражения R и пропускания D мало зависят от поляризации падающего света, максимальное различие коэффициентов пропускания для левой и правой круговых поляризаций не превышает 2%. Коэффициенты отражения и пропускания осциллируют с изменением длины волны λ , при этом расстояние между максимумами осцилляций увеличивается при возрастании λ (см. рис. 2). Кривая осцилляций D для ХЖК толщиной l_1 сдвинута относительно кривой осцилляций D для ХЖК толщиной l_2 в сторону больших длин волн. Приблизительно этот сдвиг $\Delta\lambda$ может быть описан с помощью соотношения $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{l_1}$. Наличие прозрачных пластинок с обеих сторон слоя ХЖК приводит к появлению дополнительных осцилляций (см. рис. 3), возникающих вследствие интерференции волн, отраженных от поверхностей пластинок.

Результаты настоящей работы показывают, что при исследовании оптических свойств ХЖК необходимо учитывать многократные переотражения света, влияние которых особенно заметно в области селективного отражения.

Автор выражает благодарность Л. М. Барковскому и Г. Н. Борздову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов.— М., 1978.
2. Де Жен П. Физика жидких кристаллов.— М., 1977.
3. Капустин А. П. Экспериментальные исследования жидких кристаллов.— М., 1978.
4. Чандрасекар С. Жидкие кристаллы.— М., 1980.
5. Беляков В. А., Дмитриенко В. Е., Орлов В. П.— УФН, 1979, т. 127 вып. 2, с. 221.
6. Mauguin C.— Bull. Soc. fr. Miner. Crystallogr., 1911, v. 34, p. 3.
7. Oseen C. W.— Trans. Faraday Soc., 1933, v. 29, p. 833.
8. De Vries H.— Acta Cryst., 1951, v. 4, p. 219.
9. Борздов Г. Н., Барковский Л. М.— Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1975, т. 5, с. 109.
10. Барковский Л. М., Федоров Ф. И.— Опыт и спектр., 1974, т. 36, с. 1140.
11. Барковский Л. М., Борздов Г. Н.— ЖСП, 1974, т. 20, с. 1107; 1975, т. 23, с. 143.
12. Федоров Ф. И. Теория гиротропии.— Минск, 1976.
13. Wright J. J., Dawson J. D.— J. Opt. Soc. Am., 1974, v. 64, p. 250.
14. Conners G. H.— J. Opt. Soc. Am., 1968, v. 58, p. 875.
15. Аракелян С. М., Ерицян О. С., Караян А. С., Чилингарян Ю. С.— Квантовая электроника, 1980 т. 7, с. 959.

Поступила в редакцию
07.05.81.

Кафедра общей физики

УДК 621.317.4

В. И. ПРОКОШИН, В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ, В. А. ЯРМОЛОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ МИНИАТЮРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ПЛЕНОК ПОЛУМЕТАЛЛОВ

Тенденции развития современной измерительной техники и автоматизации повысили интерес к созданию и исследованию миниатюрных измерительных структур, способных работать, например, как преобразователи Холла. В качестве материалов для изготовления такого рода датчиков применяются пленки из $A^{III}-B^V$ [1], а также из висмута [2]. Хотя ми-

миниатюрные измерительные структуры (ИС) на основе поликристаллических пленок полуметаллов имеют меньшую, чем у полупроводниковых пленок, холловскую чувствительность, технология их изготовления требует более простого и дешевого вакуумного оборудования, кроме того, исчезает проблема подбора омических контактов к пленочным элементам.

Пленочные ИС размером менее 1×1 мм² получены в результате термического испарения Bi; Sb и сплава Bi — 12 ат. % Sb в вакууме $1 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст. с использованием прецизионных никелевых пленочных масок. Толщина пленок d варьировалась в пределах 0,1—3 мкм. На одной подложке размером 20×20 мм² одновременно формировалось до 400 элементов ИС, чувствительная холловская область каждого из которых составляла $0,1 \times 0,1$ мм². К готовым пленочным элементам методом импульсной сварки с расщепленным электродом приваривались зонды из золотого микропровода диаметром 30 мкм, а места сварки укреплялись контактолом.

Вследствие значительной анизотропии процессов переноса в полуметаллах гальваномангнитные параметры пленочных измерительных структур существенно зависят от расположения кристаллитов относительно подложки. В связи с этим были исследованы текстуры в пленках висмута, сурьмы и сплава Bi — 12 ат. % Sb с помощью «обратных» полюсных фигур по методу Харриса [3], для чего проводилась запись дифракционных линий $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}4\}$, $\{10\bar{1}5\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{20\bar{2}5\}$, $\{10\bar{1}7\}$, $\{21\bar{3}0\}$, $\{12\bar{3}5\}$, $\{20\bar{2}2\}$ и $\{0009\}$. Рентгеноструктурный анализ показал, что пленки висмута, сурьмы и их сплава характеризуются текстурой типа $\{0009\}$, т. е. базисная плоскость кристаллитов в пленках располагается преимущественно параллельно подложке, что не противоречит имеющимся в литературе данным. В чистом висмуте наиболее четкая текстура $\{0009\}$ образуется при комнатной температуре подложки и толщине пленок 0,1—0,3 мкм, на нее не влияет последующий отжиг при температуре 260 °С. Текстура пленок сплава Bi — 12 ат. % Sb менее четко выражена, причем наблюдается уменьшение полюсной плотности дифракционной линии $\{0009\}$ и увеличение ее для линий $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}4\}$, $\{10\bar{1}5\}$. Наибольшей четкостью отличается текстура пленок сурьмы, у которой практически все кристаллиты расположены так, что их плоскость базиса параллельна подложке.

Измерительную структуру, помещенную в магнитное поле, можно рассматривать как миниатюрный преобразователь Холла. Холловские вольт-амперные характеристики ИС $U_x(I)$ в магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Т при комнатной температуре приведены на рис. 1. В области малых токов холловское напряжение изменяется пропорционально I . С увеличением плотности тока наблюдается отклонение от пропорциональности, что свидетельствует о разогреве пленочных элементов. Дальнейшее повышение тока приводит к необратимости холловских вольт-амперных характеристик и в конечном счете к расплавлению пленочного элемента.

Как видно из рис. 1, напряжение Холла выше у ИС из сплава Bi — 12 ат. % Sb, чем из чистых висмута и сурьмы при одинаковой толщине

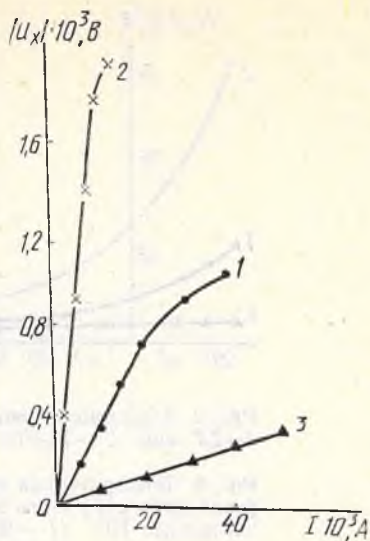


Рис. 1. Холловские вольт-амперные характеристики $|U_x(I)|$ миниатюрных пленочных ИС при комнатной температуре (1 — Bi, $d=0,25$ мкм; 2 — Bi — 12 ат. % Sb, $d=0,25$ мкм; 3 — Sb, $d=0,27$ мкм)

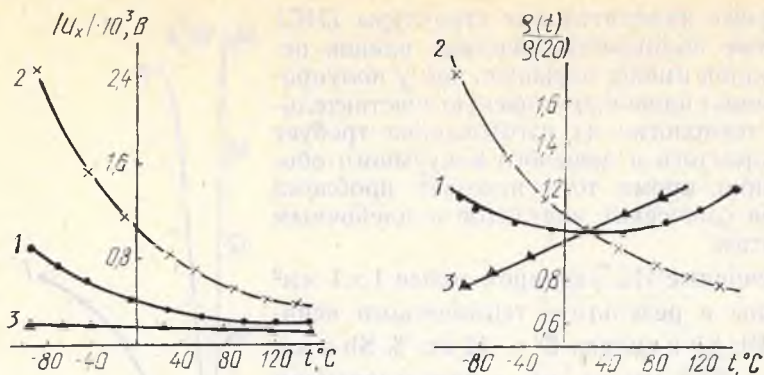


Рис. 2. Зависимость напряжения Холла $|U_x|$ от температуры (1—Bi, $d=2,7$ мкм; 2—Bi—12 ат. % Sb, $d=1,8$ мкм; 3—Sb, $d=0,27$ мкм)

Рис. 3. Температурная зависимость отношения удельного электросопротивления $\rho(T)$ к его величине при комнатной температуре для миниатюрных ИС (1—Bi, $d=0,27$ мкм; 2—Bi—12 ат. % Sb, $d=1,8$ мкм; 3—Sb, $d=0,27$ мкм)

пленок, что обусловлено следующими факторами. Во-первых, текстура исследуемых пленок висмута и сурьмы такова, что напряжение Холла определяется минимальной компонентой коэффициента Холла R_{33} . В пленках сплава Bi—12 ат. % Sb более существенны другие составляющие текстуры, а если учесть, что анизотропия коэффициента Холла R_{11}/R_{33} (R_{11} — максимальная компонента коэффициента Холла) в слабом магнитном поле для этого сплава достигает 25, то становится ясным, что ориентировка кристаллитов на подложке существенно влияет на величину напряжения Холла. Во-вторых, величина коэффициента Холла сплава Bi—12 ат. % Sb значительно больше, чем чистых висмута и сурьмы [4, 5].

На рис. 2 показана зависимость напряжения Холла ИС из Bi, Sb и Bi—12 ат. % Sb от температуры при постоянной величине тока 20 мА. Уменьшение абсолютных значений напряжения Холла с ростом температуры для всех исследованных ИС происходит, по-видимому, за счет увеличения концентрации носителей заряда вследствие термического изменения перекрытия валентной зоны и зоны проводимости [6].

На рис. 3 представлена температурная зависимость отношения удельного электросопротивления $\rho(T)$ к его величине при комнатной температуре $\rho(20)$ для исследуемых пленочных ИС. Эти результаты в основном не отличаются от описанных ранее аналогичных данных для пленок.

В миниатюрных измерительных структурах на основе висмута наблюдается вначале уменьшение, а затем возрастание удельного электросопротивления. Отличия от монотонного роста $\rho(T)$ в массивных образцах Bi можно объяснить особенностями температурного изменения подвижностей носителей заряда в пленках [7]. Характер температурной зависимости удельного электросопротивления ИС из сурьмы и сплава Bi—12 ат. % Sb совпадает с $\rho(T)$ для массивных поликристаллических образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болванович Э. И., Константинов К. С., Колесник Э. Т., Григорьев К. И., Билько В. Т., Куршечев В. Ф.—Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1981, № 1, с. 100.
2. Энглер П. И., Парсонс Д. Ф.—Приборы для научных исследований, 1974, т. 45, № 9, с. 114.
3. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов.—М., 1969, с. 654.
4. Иванов Г. А., Попов А. М.—ФТТ, 1963, т. 5, № 9, с. 2409.

5. Левицкий Ю. Т., Иванов Г. А.— ФММ, 1969, т. 28, № 5, с. 804.

6. Иванов Г. А., Левицкий Ю. Т.— Уч. зап. ЛГПИ имени А. И. Герцена, 1968, т. 384, № 4, с. 21.

7. Иванов Г. А., Грабов В. М., Михайличенко Т. В.— В сб.: Физика твердого тела. Л., 1973, с. 68.

Поступила в редакцию
07.05.81.

Кафедра физики твердого тела

УДК 621.315

Ф. Ф. КОМАРОВ, Э. М. ШПИЛЕВСКИЙ,
П. И. ГАЙДУК, Д. А. ГОРБАЧЕВСКИЙ

ХАРАКТЕРИСТИКИ $p-n$ -ПЕРЕХОДОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ЛАЗЕРНОМ ОТЖИГЕ ИОНОЛЕГИРОВАННЫХ СЛОЕВ КРЕМНИЯ

Свойства ионолегированных полупроводниковых слоев, отожженных лазерными импульсами наносекундной длительности, в значительной степени определяются величиной плотности энергии W в импульсе [1, 2]. Изменение этого важного параметра от импульса к импульсу является причиной, сдерживающей использование лазерного излучения для отжига полупроводниковых структур. Преодолеть это затруднение можно, во-первых, путем создания высокостабильного лазера и, во-вторых, найдя такие интервалы плотностей энергии, в которых свойства отожженных слоев меняются незначительно. В данной работе задача оптимального режима отжига решается на примере кремния, облученного большими дозами сурьмы; в этом случае можно получить концентрацию примеси в положении замещения, на порядок превышающую предел ее растворимости в равновесных условиях [3, 4].

Пластины кремния марки КДБ-0,3, вырезанные по плоскости (111), облучались ионами сурьмы с энергией $E=60$ кэВ, дозами $D=6,2 \cdot 10^{15}$ и $1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см². Имплантация производилась на стандартной установке «Везувий-1». Для отжига аморфизированных слоев применяли рубиновый лазер с модулированной добротностью ($\lambda=0,694$ мкм, $\tau=25$ нс). Плотность энергии в импульсе изменяли с помощью подбора расстояния линза — образец от 0,3 до 2,5 Дж/см². Структурные превращения в ионолегированных слоях изучали с помощью методов просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) и дифракции. Изменение электрофизических свойств контролировалось путем измерения вольт-амперных характеристик (ВАХ).

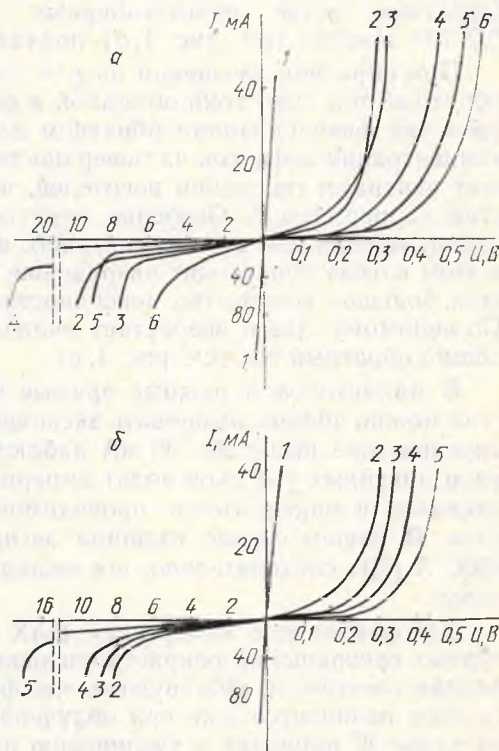


Рис. 1. Вольт-амперные характеристики $p-n$ -переходов, полученных при различных режимах лазерного отжига ионолегированных слоев:

а) $D=1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см²: 1 — неотожженный слой; 2 — $W=0,44$ Дж/см²; 3 — $W=0,85$ Дж/см²; 4 — $W=1,1$ Дж/см²; 5 — $W=1,8$ Дж/см²; 6 — $W=2,5$ Дж/см²; б) $D=6,2 \cdot 10^{15}$ ион/см²: 1 — неотожженный слой; 2 — $W=0,44$ Дж/см²; 3 — $W=0,75$ Дж/см²; 4 — $W=0,85$ Дж/см²; 5 — $W=1,1$ Дж/см².

Из сравнения рис. 1, *а, б*, где показаны ВАХ $p-n$ -переходов, полученных при различных режимах отжига, видно, что увеличение дозы внедренных ионов приводит к незначительному изменению вида характеристик. Данный результат можно понять из следующих соображений. При имплантации сурьмы дозами $6,2 \cdot 10^{15}$ — $1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см² концентрация примеси на глубине среднего проекционного пробега имеет величину порядка $(2-4) \cdot 10^{21}$ ат/см³ [5], что в 30—60 раз превышает максимальный предел растворимости сурьмы в кремнии в равновесных условиях. Проведенные ранее измерения поверхностной проводимости при послыоном снятии анодноокисленных слоев показали [6], что концентрация электроактивной примеси после импульсного лазерного отжига не превышает $4 \cdot 10^{20}$ ат/см³. Следовательно, суммарное количество активированной примеси во всем слое одинаково для обеих доз (при условии одинаковых режимов отжига), поэтому различия вольт-амперных характеристик будут зависеть только от структурного совершенства слоев. Этот вывод подтверждается поведением обратных ветвей характеристик.

На рис. 1, *а* представлены ВАХ $p-n$ -переходов, полученных при имплантации сурьмы дозой $1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см² и отожженных лазером с различными плотностями энергии. Видно, что при увеличении плотности энергии в интервале от 0,4 до 0,9 Дж/см² напряжение пробоя изменяется незначительно, при W выше 1,1 Дж/см² наблюдается увеличение напряжения пробоя до 19—25 В. Однако при облучении лазерными импульсами с плотностью энергии выше некоторой пороговой W (в нашем случае 1,7—1,8 Дж/см²) наблюдается повреждение поверхности, которое, вероятно, является причиной снижения напряжения пробоя в два—три раза. Обратные ветви вольт-амперных характеристик в случае дозы $6,2 \cdot 10^{15}$ ион/см² (см. рис. 1, *б*) подчиняются этим же закономерностям.

При обратном смещении на $p-n$ -переходе основной вклад в общий обратный ток дают токи объемной и поверхностной генерации. Величина тока при фиксированном обратном напряжении тем больше, чем выше концентрация дефектов на поверхности и в объеме, так как дефекты служат центрами генерации носителей, что согласуется с ходом зависимостей на рис. 1, *а, б*. Особенно заметно увеличение обратного тока при использовании для отжига лазерного импульса с $W=2,5$ Дж/см², так как в этом случае происходит разрушение поверхности образца, т. е. появляется большое количество поверхностных и приповерхностных дефектов. По-видимому, здесь возрастает вклад тока поверхностной генерации в общий обратный ток (см. рис. 1, *а*).

В миллитокетовом режиме прямые ветви вольт-амперных характеристик можно аппроксимировать экспоненциальной зависимостью. При увеличении тока выше 20—30 мА наблюдается линейная зависимость. Наклон линейных участков вольт-амперных характеристик приблизительно одинаков и определяется проводимостью подложки и легированного слоя. В нашем случае толщина легированного слоя невелика (1500—3000 Å [6]), следовательно, его вклад в общую проводимость незначителен.

Одновременно с измерением ВАХ проводилось исследование структурных превращений рекристаллизованных слоев методами ПЭМ и дифракции электронов. Обнаружено, что формирование поликристаллического слоя начинается уже при облучении лазером с $W=0,3$ Дж/см². Возрастание W приводит к увеличению размеров кристаллитов и сильному микродвойникованию (рис. 2, *а, б*). Дальнейшее увеличение W вызывает эпитаксиальную рекристаллизацию как в случае дозы $6,2 \cdot 10^{15}$ ион/см², так и в случае дозы $1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см². Однако формирование вторичных дефектов при этом происходит неодинаково: отжиг образцов, имплантированных меньшими дозами, приводит к относительно малodefekтным областям (рис. 2, *в*). Здесь обнаружены дислокационные петли двух видов: одни лежат в приповерхностной области и декорированы примесью, другие расположены глубже и имеют более четкий контраст. С повыше-

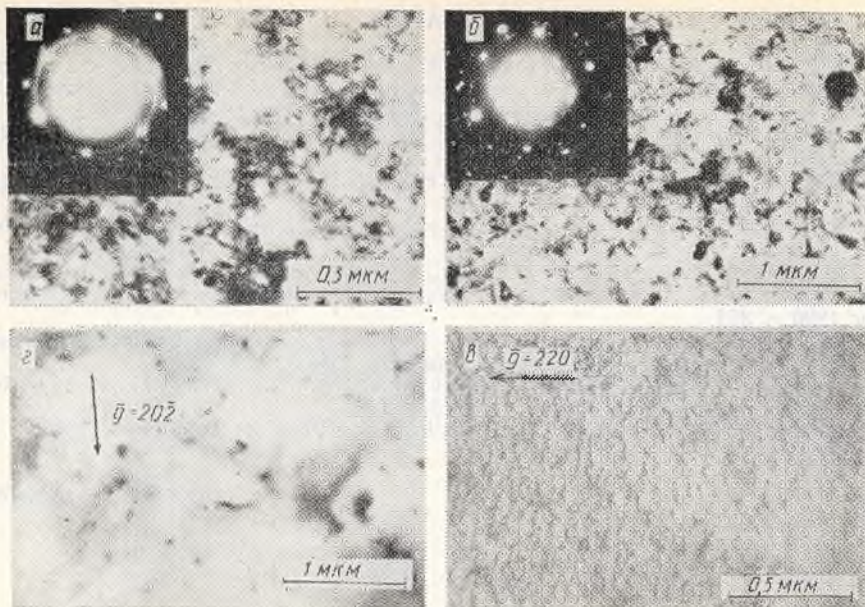


Рис. 2. Структурные изменения ионолегированных слоев при различных режимах отжига:

a — $D=6,2 \cdot 10^{15}$ ион/см², $W=0,4$ Дж/см²; *б* — $D=1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см², $W=0,8$ Дж/см²; *в* — $D=6,2 \cdot 10^{15}$ ион/см², $W=1,1$ Дж/см²; *г* — $D=1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см², $W=1,1$ Дж/см²

нием плотности энергии до 1,3 Дж/см² дислокационные петли первого типа исчезают, что можно объяснить диффузией сурьмы в глубину кристалла. При увеличении дозы до $1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см² дефектность структуры сильно возрастает (рис. 2, *г*). На микрофотографии наблюдаются дислокации и дислокационные петли, сильно декорированные сурьмой. Повышение плотности энергии до 1,3 Дж/см² снижает дефектность структуры, однако полностью ее не устраняет. Отжиг с плотностью энергии, превышающей 1,7 Дж/см², приводит к частичному или полному повреждению поверхности образцов. Кроме того, увеличение W сопровождается значительным возрастанием содержания кислорода в приповерхностных слоях. Загрязнение кремния кислородом в процессе лазерного отжига на воздухе и в атмосфере кислорода изучалось в работе [7] методом масс-спектрологии вторичных ионов. Авторы работы [8] наблюдали образование αSiO_2 методами ПЭМ. В этом случае для появления окисла был необходим последующий термический отжиг в интервале температур 700—800 °С.

Наблюдается хорошее соответствие электрофизических характеристик с результатами структурных исследований. Облучение имплантированных слоев импульсами с плотностью энергии 1,1—1,6 Дж/см² приводит к возможности получать $p-n$ -переходы с высокими напряжениями пробоя. Одновременно достигается достаточно совершенная структура рекристаллизованных слоев.

Таким образом, в результате исследований определен оптимальный режим получения $p-n$ -переходов с помощью лазерного отжига монокристаллов кремния, ионолегированного сурьмой. Установлено, что наиболее качественные $p-n$ -переходы образуются при имплантации сурьмы дозой $6,2 \cdot 10^{15}$ ион/см² и последующем отжиге лазером с плотностью энергии 1,1—1,6 Дж/см². Увеличение дозы легирования до $1,3 \cdot 10^{16}$ ион/см² не приводит к существенному изменению ВАХ, однако дефектность структуры в оптимальном режиме отжига возрастает.

В заключение авторы выражают благодарность Белобровику В. И. за помощь при проведении лазерного отжига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайбуллин И. Б., Штырков Е. И., Зарипов М. М., Галаяутдинов М. Ф., Баязитов Р. М. Отжиг ионолегированных слоев под действием лазерного излучения.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2061-74. Деп. от 06.07.74.
2. Хайбуллин И. Б., Штырков Е. И., Зарипов М. М.— Изв. АН СССР. Физика, 1981, т. 45, № 8, с. 1464.
3. White C. W., Wilson S. R., Appleton V. R., Young F. W.— J. Appl. Phys., 1980, v. 51, № 1, p. 738.
4. Natsuaki N., Tamura M., Tokuyama T.— J. Appl. Phys., 1980, v. 51, № 1, p. 738.
5. Буренков А. Ф., Комаров Ф. Ф., Кумахов М. А., Темкин М. М. Таблицы параметров пространственного распределения ионоимплантированной примеси.— Минск, 1980, с. 352.
6. Гайдук П. И., Комаров Ф. Ф.— Тез. докл. XII совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М., 1982, с. 129.
7. Koichiro Hoh, Hiroshi Koyama, Keiichiro Uda, Yoshio Miura.— Jap. J. Appl. Phys., 1980, v. 19, № 7, p. L375.
8. Garulli A., Servidoli M., Veechi I.— J. Phys. D: Appl. Phys., 1980, v. 13, № 10, p. L199.

Поступила в редакцию
07.06.82.

НИИ ПФП, кафедра ФТТ

УДК 538

В. В. ГУСАКОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА РАДИОСПЕКТРОМЕТРА

Величина регистрируемого сигнала электронного парамагнитного резонанса в спектрометре ЭПР зависит от параметров исследуемого образца (концентрация парамагнитных центров, величина мощности насыщения и т. д.) и от конструктивных характеристик спектрометра (мощность СВЧ-генератора, добротность измерительного резонатора, параметры связи резонатора с СВЧ-трактом, тип детектора). Задача установления зависимости величины сигнала от характеристик СВЧ-элементов спектрометра и параметров образца для ряда ограниченных случаев решалась в [1, 2]. Для спектрометров с проходным измерительным ре-

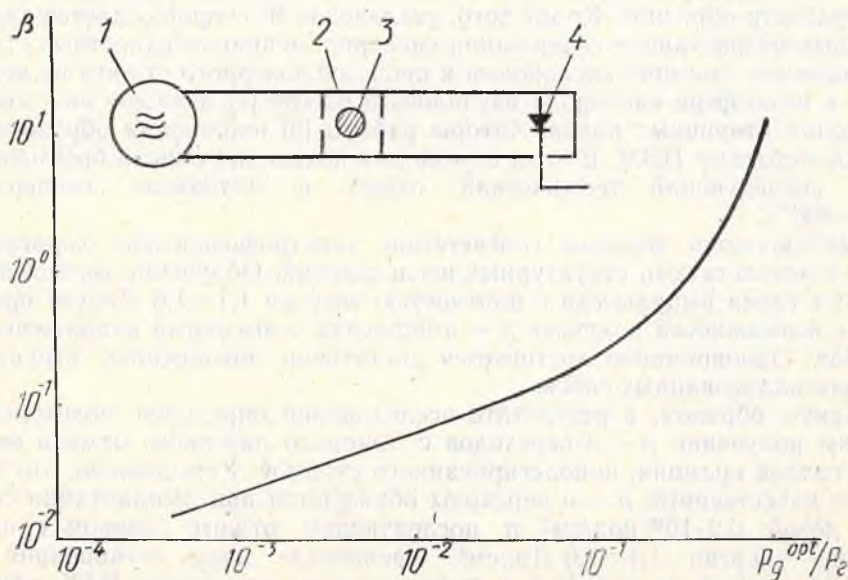


Рис. 1. Номограмма оптимальных по току детектора значений и схема СВЧ-тракта спектрометра ЭПР с проходным измерительным резонатором:

1 — генератор; 2 — измерительный резонатор; 3 — образец; 4 — детектор

зонатором (рис. 1), удобных для использования в учебных целях и при экспресс-анализе, величина сигнала ЭПР ΔI определяется следующими выражениями:

$$\text{для квадратичного детектора } \Delta I \sim \Delta P_d = \frac{8\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2+1)^3} \cdot P_r \cdot \frac{\Delta Q}{Q}, \quad (1a)$$

$$\text{для линейного детектора } \Delta I \sim \Delta U_d = \frac{2\beta_1^{1/2}\beta_2^{1/2}}{(\beta_1+\beta_2+1)^{1/2}} \cdot P_r^{1/2} \cdot R_d^{1/2} \cdot \frac{\Delta Q}{Q}, \quad (1б)$$

где ΔP_d — изменение СВЧ-мощности на детекторе, вызванное парамагнитным поглощением; ΔU_d — изменение СВЧ-напряжения на детекторе, вызванное парамагнитным поглощением; β_1 — коэффициент связи измерительного резонатора с СВЧ-трактом со стороны генератора; β_2 — коэффициент связи измерительного резонатора с СВЧ-трактом со стороны детектора; P_r — мощность генератора; R_d — сопротивление детектора; $\frac{\Delta Q}{Q}$ — относительное изменение добротности измерительного резонатора, вызванное парамагнитным поглощением.

Задача нахождения оптимальных значений β_1 и β_2 с целью повышения чувствительности сводится [1, 2] к определению максимума функции $S(\beta_1, \beta_2)$:

$$\text{для квадратичного детектора } S_{\text{кв}}(\beta_1, \beta_2) = \frac{8\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2+1)^3}, \quad (2a)$$

$$\text{для линейного детектора } S_{\text{л}}(\beta_1, \beta_2) = \frac{2\beta_1^{1/2}\beta_2^{1/2}}{(\beta_1+\beta_2+1)^2}. \quad (2б)$$

В обоих случаях задача имеет одно решение: $\beta_1 = \beta_2 = 1$ для квадратичного детектора, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ для линейного.

При таком подходе, во-первых, игнорируется необходимость установления оптимального значения мощности на детекторе P_d (1) и, во-вторых, не учитываются неизбежные в условиях парамагнитного насыщения ограничения на мощность P_p , рассеиваемую в измерительном резонаторе.

Целью работы являлось определение оптимальных условий работы спектрометра применительно к реальным экспериментальным ситуациям (заданные значения P_d и P_p).

Оптимизация чувствительности по току детектора. В отсутствие эффектов насыщения задача оптимизации должна быть поставлена следующим образом: определить точки максимума функции $S(\beta_1, \beta_2)$ при постоянной мощности P_d . Как следует из схемы, показанной на рис. 1,

$$P_d = \frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2+1)^2} P_r. \quad (3)$$

Таким образом, для квадратичного детектора необходимо определить точки максимума функции $S_{\text{кв}}(\beta_1, \beta_2)$ (2a) при

$$\frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2+1)^2} P_r = P_d^{\text{opt}}. \quad (4)$$

В случае линейного детектора с учетом уравнения связи (4) находят точки максимума функции $S_{\text{л}}(\beta_1, \beta_2)$ (2б).

Задача решалась методом множителей Лагранжа и в отличие от [1] имеет совпадающие в обоих случаях решения:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{a + a^{1/2}}{2(1-a)}, \quad a = \frac{P_d^{\text{opt}}}{P_r}. \quad (5)$$

На рис. 1 приведена номограмма для определения оптимального значения β , обеспечивающего максимальное отношение сигнал/шум и отсутствие перегрузки. Для точечных кремниевых диодов при $P_d^{\text{opt}} = 1$ мВт и $P_r = 50$ мВт (генератор на основе диода АА703Б) $\beta \approx 0,1$, тогда как для следующего из решения (2 а) $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $P_d = 22$ мВт, что превышает предельно допустимое для детекторного диода значение.

На практике требуемую величину P_d^{opt} обычно устанавливают регулировкой входного аттенюатора (уменьшением P_r). Величина сигнала в этом случае, как следует из (1) и (3),

$$\text{для квадратичного детектора } \Delta I' \sim \Delta P_d' = S_{\text{КВ}}(1,1) \frac{9}{4} P_d^{\text{opt}} \frac{\Delta Q}{Q}, \quad (6a)$$

$$\text{для линейного детектора } \Delta I' \sim \Delta U_d' = S_{\text{Л}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) 4 P_d^{\text{opt}} \frac{\Delta Q}{Q}, \quad (6б)$$

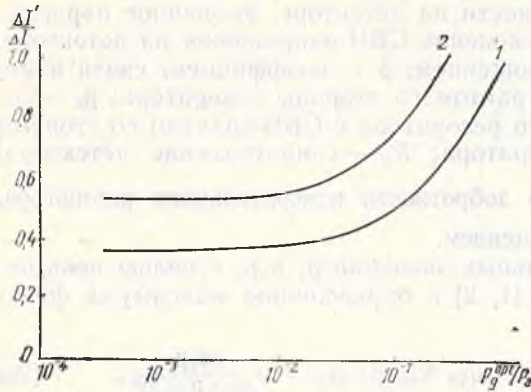
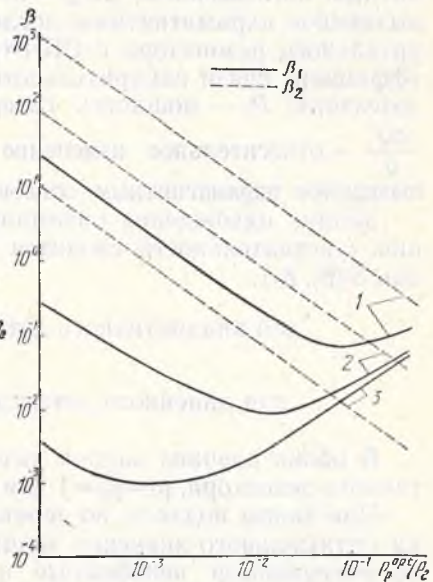


Рис. 2. Отношение сигнала $\Delta I'$ при регулировке аттенюатором к сигналу ΔI (регулировка β_1 и β_2) как функция P_d^{opt} / P_r ;

1 — квадратичный; 2 — линейный детекторы

Рис. 3. Номограмма оптимальных значений β_1 и β_2 с учетом парамагнитного насыщения для $P_d^{\text{opt}} / P_r = 0,1$ (1); 0,01 (2); 0,001 (3)



На рис. 2 приведены графики отношения $\Delta I' / \Delta I$, где ΔI — величина сигнала, получаемого в случае регулирования мощности P_d с помощью другого способа — выбора коэффициентов β_1 и β_2 , согласно (5). Из рисунка видно, что для обоих типов детекторов в диапазоне соотношений P_d^{opt} и P_r от 10^{-3} до 0,2 такой способ установки мощности P_d^{opt} обеспечивает повышение чувствительности спектрометра в 1,8—2,5 раза по сравнению с регулировкой входным аттенюатором. Из выражений (5, 6) и рис. 2 следует, что в условиях заданного P_r предпочтение надо отдавать такому детекторному диоду, чтобы $P_d^{\text{opt}} = 4/9 P_r$ для квадратичного детектора и $P_d^{\text{opt}} \approx 1/4 P_r$ для линейного, или устанавливать значения β_1 и β_2 , согласно (5) и номограмме.

Учет парамагнитного насыщения. При проявлении эффекта насыщения максимальная чувствительность достигается, если мощность P_p , рассеиваемая в резонаторе, равна мощности насыщения P_p^{opt} . Это соответствует следующим условиям (см. схему на рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} P_d^{\text{opt}} &= \frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 + 1)^2} P_r \\ P_d^{\text{opt}} &= \frac{4\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2 + 1)^2} P_r \end{aligned} \right\}$$

Система имеет следующее решение: $\beta_2 = a/b$, $\beta_1 = \left(\frac{2}{b} - \beta_2 - 1 \right) - \frac{2}{b} (1 - \beta_2 b - b)^{1/2}$, $b = \frac{P_p^{\text{opt}}}{P_r}$.

Из номограммы (рис. 3) следует, что оптимальные условия работы спектрометра достигаются, в противоположность предыдущему случаю,

при различающихся между собой значениях β_1 и β_2 . Например, для типичного случая $P_r \approx 50$ мВт, $P_d^{opt} \approx 1$ мВт и $P_p^{opt} \approx 1$ мВт, $\beta_1 = 0,01$, $\beta_2 = 1$. В реальных пределах изменения величин P_r ($10 \div 200$ мВт), P_d^{opt} ($1 \div 10$ мВт) и P_p^{opt} ($0,1 \div 100$ мВт) диапазон оптимальных значений β_2 ($0,01 \div 100$) значительно шире диапазона для β_1 ($0,01 \div 5$). Таким образом, в спектрометре целесообразно предусмотреть регулировку связи со стороны детектора в более широких пределах, чем со стороны генератора.

В спектрометре проходного типа на образец воздействует как магнитная компонента поля стоячей волны H_c , так и компонента H_b бегущей волны, поступающей на детектор. Оценка показывает, что $H_b/H_c = \sqrt{P_d}/\sqrt{QP_p}$ и при значениях $Q \approx 100 \dots 10000$ учет поля становится существенным при $P_d/P_p > 10$.

Автор признателен В. Ф. Стельмаху за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пул Ч. Техника ЭПР-спектроскопии.— М., 1970, с. 483; 250.
2. Wilmshurst T. H., Gambling W. A., Ingram P. J.— J. Electron. Control, 1962, v. 13, p. 332.

Поступила в редакцию
06.09.82.

Кафедра физики полупроводников

УДК 621.391.24

А. Н. ЛАЗАРЧИК

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ВРЕМЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ В ТЕОРИИ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Цель настоящей работы — оценка точности приближения в методе временной дискретизации в зависимости от величины интервала дискретизаций для случая стационарных процессов.

Рассмотрим случайный сепарабельный, стационарный в широком смысле процесс $x(t)$. Будем предполагать, что для него существуют многомерные плотности вероятности любой размерности. Случайный процесс $x(t)$ считается заданным, если для него задан набор многомерных плотностей распределения $\{W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)\}$ ($n=1, 2, \dots$), удовлетворяющих условиям симметрии и согласованности [1]. Условие симметрии требует, чтобы функции W_n были симметричны по всем переменным (x_i, t_i) . Условие согласованности выражается соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i; \dots; x_n, t_n) dx_i = \\ = W_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{i-1}, t_{i-1}, x_{i+1}, t_{i+1}; \dots; x_n, t_n).$$

Интегральную функцию распределения абсолютного максимума случайного процесса на интервале времени $(0, T)$ можно определить как вероятность нахождения процесса $x(t)$ ниже некоторого фиксированного уровня h на интервале времени $(0, T)$, т. е. $F(h, T) = P\{\sup_{t \in (0, T)} x(t) < h\}$.

Как отмечалось в [2], значение функции распределения можно определить следующим пределом:

$$F(h, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(h, T), \quad (2)$$

где $F_n(h, T)$ — n -мерная интегральная функция распределения процесса, определяемая равенством

$$F_n(h, T) = \int_{-\infty}^h \dots \int_{-\infty}^h W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

В предельном переходе (2) предполагается, что точки t_i задают некоторое Δ -разбиение интервала $(0, T)$, и диаметр этого разбиения стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Существование предела (2) следует из условия согласованности (1). В дальнейшем будем рассматривать только равномерные разбиения интервала $(0, T)$, т. е. точки t_i в выражении (3) будут выбираться следующим образом: $t_i = (i-1)\tau$, $i = \overline{1, n}$, $\tau = T/(n-1)$.

Сущность метода дискретизации заключается в том, что функция $F(h, T)$ заменяется конечномерной функцией распределения $F_n(h, T)$. В результате такой замены допускается некоторая погрешность $\delta_n = F_n(h, T) - F(h, T)$, зависящая от величины интервала дискретизации τ . Справедлива следующая теорема, позволяющая оценить δ_n , если известна трехмерная плотность распределения процесса.

Теорема 1. Пусть $x(t)$ — случайный, непрерывно дифференцируемый с вероятностью единица, процесс с указанными свойствами, тогда спра-

ведливо неравенство $\delta_n < \frac{T}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k g\left(\frac{\tau}{2^k}\right)$, где $g(t) = \int_{-\infty}^h \int_h^{\infty} \int_{-\infty}^h W_3(x_1, 0; x_2, t/2; x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3$.

Доказательство. Построим последовательность функций F_m , $m = n, n+1, \dots$, следующим образом. Дельта-разбиение интервала $(0, T)$, соответствующее члену последовательности F_{n+1} , получается из дельта-разбиения, соответствующего члену F_n , добавлением одной точки t_{n+1} , которая делит первый τ -отрезок пополам. Учитывая (1), можно

записать, что $F_{n+1} = F_n - V_{n+1}$, где $V_{n+1} = \int_{-\infty}^h \dots \int_{-\infty}^h W_{n+1}(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1}) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1}$.

Продолжим указанный процесс деления остальных τ -отрезков первоначального разбиения до тех пор, пока все τ -отрезки не будут поделены пополам. В результате получим

$$F_{2n-1} = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} V_{n+i}. \quad (4)$$

Новое дельта-разбиение, соответствующее члену F_{2n-1} , будет вновь равномерным, но с шагом $\tau_1 = \tau/2$. Вследствие соотношения (1) и условия стационарности процесса справедливо неравенство

$$V_{n+i} < g(\tau), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

Принимая во внимание (5), получим из (4) $F_{2n-1} > F_n - \frac{T}{\tau} g(\tau)$. Производя описанную операцию деления пополам τ_1 — отрезков, придем к следующему неравенству: $F_{4n-1} > F_{2n-1} - \frac{2T}{\tau} g\left(\frac{\tau}{2}\right)$. Продолжая неограниченно указанную процедуру деления, получим цепочку неравенств $F_{2^k n-1} > F_{2^{k-1} n-1} - \frac{2^{k-1} T}{\tau} g\left(\frac{\tau}{2^{k-1}}\right)$, $k = 1, 2, \dots$, из которой непосредственно следует утверждение теоремы 1.

Следует отметить, что условие дифференцируемости процесса обеспечивает сходимость ряда в правой части неравенства теоремы. Действительно, для функции $g(\tau)$ справедливо следующее неравенство: $g(\tau) \leq P\{C(0, \tau) \geq 2\}$, где $C(0, \tau)$ — число пересечений уровня h процессом $x(t)$ на интервале $(0, \tau)$. Согласно [1], для стационарного процесса, непрерывно дифференцируемого с вероятностью единица, можно утверждать, что $P\{C(0, \tau) \geq 2\} = o(\tau)$, при $\tau \rightarrow 0$.

Таким образом, $g(\tau)$ есть функция более высокого порядка малости, чем τ . В этом случае, как легко убедиться, ряд в правой части неравенства теоремы сходится.

Для дальнейшего анализа конкретизируем вид рассматриваемого процесса. Одним из классов случайных процессов, для которых много-

мерные плотности вероятности задаются сравнительно просто, является класс гауссовских случайных процессов. В этом случае имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $x(t)$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и коэффициентом корреляции $r(t)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $r(\tau) = 1 - \frac{\omega^2}{2} \tau^2 + \frac{a}{3!} |\tau|^3 + o(\tau^3)$ при $\tau \rightarrow 0$, то $\delta_n = O(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$;

2) если $r(\tau) = 1 - \frac{\omega^2}{2} \tau^2 + \frac{r_0^{(4)}}{4!} \tau^4 + o(\tau^4)$ при $\tau \rightarrow 0$, то $\delta_n = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$.

Доказательство. Определим порядок малости функции $g(\tau)$ при указанных в теореме условиях. С этой целью вычислим производные по τ функции $g(\tau)$ в точке $\tau=0$. При вычислении производных воспользуемся следующим известным тождеством, которому удовлетворяют гауссовские многомерные плотности: $\frac{\partial G_n}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial^2 G_n}{\partial x_i \partial x_j}$, где G_n — n -мерная гауссовская плотность; $r_{ij} = r(t_i - t_j)$ — коэффициент корреляции i -того и j -того отсчетов процесса.

Используя условие первого пункта теоремы 2, найдем $g'(0) = 0$;
 $g''(0) = \frac{a}{24\pi\omega} e^{-\frac{h^2}{2}}$.
 Отсюда следует, что

$$g(\tau) \sim \frac{1}{2} g''(0) \tau^2. \quad (6)$$

Воспользовавшись теоремой 1 и соотношением (6), получим утверждение первого пункта теоремы 2. Аналогично для условия второго пункта теоремы получим $g'(0) = g''(0) = 0$; $g'''(0) = \frac{1}{64\pi} \left\{ \frac{24(r_0^{(4)} - \omega^4) + 3\omega^4 h^2}{\omega} \times \right.$
 $\times e^{-\frac{h^2}{2}} \left[1 - \Phi \left(\frac{\omega^2 h}{\sqrt{r_0^{(4)} - \omega^4}} \right) \right] - 6h\omega \sqrt{\frac{r_0^{(4)} - \omega^4}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{h^2 r_0^{(4)}}{2(r_0^{(4)} - \omega^4)} \right\} \Big\}$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Отсюда

$$g(\tau) \sim \frac{1}{6} g'''(0) \tau^3. \quad (7)$$

Из теоремы 1 и соотношения (7) следует утверждение второго пункта теоремы 2.

Таким образом, в случае гауссовских процессов, удовлетворяющих пункту 1) теоремы 2, при достаточно малом τ можно пользоваться верхней оценкой для погрешности $\delta_n < T g''(0) \tau$. Соответствующее неравенство для процессов, удовлетворяющих второму пункту теоремы 2, имеет следующий вид: $\delta_n < \frac{2}{9} T g'''(0) \tau^2$.

Полученные результаты позволяют оценить погрешность метода дискретизации случайного процесса при заданном интервале дискретизации или по допустимой погрешности определить необходимый шаг дискретизации. В заключение отметим, что приведенные соотношения, как нетрудно видеть, справедливы и для случая вычисления вероятности нахождения процесса выше некоторого фиксированного уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М., 1969.
2. Фомин Я. А. Теория выбросов случайных процессов. — М., 1980.



УДК 62-50

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ОДИН МЕТОД ПРОВЕРКИ КРИТЕРИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где x — n -вектор; A , A_1 — постоянные $n \times n$, $n \times r$ — матрицы соответственно; u — r -вектор управления.

Известно [1], что система (1) управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n. \quad (2)$$

Иногда на практике, в силу больших размеров матриц A и B , проверка критерия (2) вызывает большие затруднения. Рассмотрим метод, который позволяет от проверки равенства (2) перейти к проверке соотношений, имеющих, как правило, матрицы малых размеров.

Пусть T — неособая $n \times n$ -матрица, преобразующая матрицу A к форме Жордана: $I = TAT^{-1} = [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)]$, $\sum_{i=1}^s \rho_i = n$. Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — различные собственные числа матрицы A , $I_{\rho_l}(\lambda_l) = \text{diag} \{ \Gamma_{\rho_l, 1}(\lambda_l), \Gamma_{\rho_l, 2}(\lambda_l), \dots, \Gamma_{\rho_l, m_l}(\lambda_l) \}$, $l = \overline{1, s}$, где $\Gamma_{\rho_l, i} = n_{\rho_l, i} \times n_{\rho_l, i}$ — клетка Жордана, отвечающая элементарному делителю $(\lambda - \lambda)^{n_{\rho_l, i}}$ матрицы A . Пусть $n_{\rho_l, 1} \geq n_{\rho_l, 2} \geq \dots \geq n_{\rho_l, m_l}$, $\sum_{i=1}^{m_l} n_{\rho_l, i} = \rho_l$. Равенство (2) эквивалентно равенству

$$\text{rank } Q = n, \quad Q = [TB, ITB, \dots, I^{n-1}TB]. \quad (3)$$

Положим

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ B_s \end{bmatrix},$$

где $B_i = \rho_i \times r$ — матрицы. Покажем, что существует невырожденное преобразование столбцов такое, что

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_s & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $q_i = [B_i, H_{\rho_i} B_i, \dots, H_{\rho_i}^{n_{\rho_i} - 1} B_i]$, $H_{\rho_i} = I_{\rho_i}(0)$, $i = \overline{1, s}$. Действительно, пусть $TB = \{b_{\gamma\beta}\} = [b_1, b_2, \dots, b_r]$, $\gamma = \overline{1, n}$, $\beta = \overline{1, r}$. Матрицу Q можно представить в виде $Q = [b_1, Ib_1, \dots, I^{n-1}b_1, b_2, \dots, I^{n-1}b_2, \dots, b_r, \dots, I^{n-1}b_r]$. Введем дополнительные обозначения. Через b обозначим произвольный столбец матрицы TB . Пусть $b' = [b_{(1)}^{(0)}, b_{(2)}^{(0)}, \dots, b_{(s)}^{(0)}]' = \{b_{\gamma}^{(0)}\}$, где $b_{(i)}^{(0)}$ — ρ_i — вектор-столбцы, $i = \overline{1, s}$; $b_{\gamma}^{(0)}$ — элементы вектора b ;

$$\Phi^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} = [b, Ib, \dots, I^{n-1}b] = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Phi_s^{(0)} \end{bmatrix},$$

$\Phi_i^{(0)}$ — $\rho_i \times n$ — матрица; $\Phi_{(i)j}^{(0)}$ — j -ый столбец матрицы $\Phi_i^{(0)}$. Вычислим $j+1$ -ый столбец матрицы $\Phi_i^{(0)}$:

$$\Phi_{(i), j+1}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\sigma=0}^{n_{\rho_i} - 1} C_j \lambda_i^{j-\sigma} b_{i-1}^{(0)} \quad \sum_{\sigma=0}^{n_{\rho_i} - 1} C_j \lambda_i^{j-\sigma} b_{i-1}^{(0)} \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum_{l=1}^{\rho_i + n_{\rho_i} - 1} C_j^0 \lambda_i^j b_{i-1}^{(0)} \quad \dots \quad \sum_{\sigma=0}^{n_{\rho_i} - 1} C_j \lambda_i^{j-\sigma} b_{i-1}^{(0)} \quad \dots \quad \sum_{l=1}^{\rho_i} C_j^0 \lambda_i^j b_{i-1}^{(0)} \end{array} \right\}$$

Из $j+1$ -ого столбца матрицы $\Phi^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ вычтем k -ый столбец, $k = \overline{1, j}$, умноженный на $C_j^{k-1} \lambda_i^{j-k+1}$. Первые ρ_1 строк преобразованной матрицы $\Phi^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ примут вид

$$\begin{bmatrix} b_1^{(0)} & \dots & b_{n_{\rho_1, 1}}^{(0)} \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ b_{n_{\rho_1, 1}}^{(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ b_{n_{\rho_1, 1}+1}^{(0)} & \dots & b_{n_{\rho_1, 1}+n_{\rho_1, 2}}^{(0)} \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ b_{n_{\rho_1, 1}+n_{\rho_1, 2}}^{(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{\sum_{i=1}^{m_1-1} n_{\rho_1, i}+1}^{(0)} & \dots & b_{\rho_1}^{(0)} \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ b_{\rho_1}^{(0)} & \dots & 0 \end{bmatrix} 0 = [b_{(1)}^{(0)}, H_{\rho_1} b_{(1)}^{(0)}, \dots, H_{\rho_1}^{n_{\rho_1} - 1} b_{(1)}^{(0)}, 0].$$

Остальные $n - \rho_1$ строк матрицы $\Phi^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ сохраняют свой вид, но вместо λ_i теперь будут стоять числа $\lambda_i^{(1)} = (\lambda_i - \lambda_1)$. Рассмотрим матрицу $\Phi^{(1)} \begin{pmatrix} n - \rho_1 & \dots & n \\ n - \rho_1 & \dots & n \end{pmatrix}$. Первый столбец этой матрицы обозначим через $[b_{(2)}^{(1)}, b_{(3)}^{(1)}, \dots, b_{(s)}^{(1)}]'$, где $b_{(i)}^{(1)} = I_{\rho_1}^{n_{\rho_1} - 1} (\lambda_i^{(1)}) b_{(i)}^{(0)}$, $i = \overline{2, s}$. С матри-

цей $\Phi^{(1)} \begin{pmatrix} n - \rho_1 & \dots & n \\ n - \rho_1 & \dots & n \end{pmatrix}$ повторим те же операции. В результате первые ρ_2 строк матрицы $\Phi^{(1)}$ примут вид, аналогичный (5).

Переходим к матрице $\Phi^{(2)} \begin{pmatrix} n - \rho_1 - \rho_2 & \dots & n \\ n - \rho_1 - \rho_2 & \dots & n \end{pmatrix}$ и т. д.

В результате матрица $\Phi^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ путем элементарных преобразований столбцов приводится к виду

$$\Phi^{(s-1)} = \begin{bmatrix} b_{(0)}^{(1)} & H_{\rho_1}^{n_{\rho_1}} b_{(1)}^{(0)} & \dots & H_{\rho_1}^{n_{\rho_1}-1} b_{(1)}^{(0)} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ b_{(2)}^{(0)} & I_{\rho_2}(\lambda_2^{(1)}) b_{(2)}^{(0)} & \dots & I_{\rho_2}^{n_{\rho_2}-1}(\lambda_2^{(1)}) b_{(2)}^{(0)} & b_{(2)}^{(1)} & \dots & H_{\rho_2}^{n_{\rho_2}} b_{(2)}^{(1)} & \dots & \dots \\ b_{(3)}^{(0)} & I_{\rho_3}(\lambda_3^{(1)}) b_{(3)}^{(0)} & \dots & I_{\rho_3}^{n_{\rho_3}-1}(\lambda_3^{(1)}) b_{(3)}^{(0)} & b_{(3)}^{(1)} & \dots & I_{\rho_3}^{n_{\rho_3}}(\lambda_3^{(2)}) b_{(3)}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{(s)}^{(0)} & I_{\rho_s}(\lambda_s^{(1)}) b_{(s)}^{(0)} & \dots & I_{\rho_s}^{n_{\rho_s}-1}(\lambda_s^{(1)}) b_{(s)}^{(0)} & b_{(s)}^{(1)} & \dots & I_{\rho_s}^{n_{\rho_s}}(\lambda_s^{(2)}) b_{(s)}^{(1)} & \dots & b_{(s)}^{(s-1)} & \dots & H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}} b_{(s)}^{(s-1)} \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\Phi^{(s-1)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(s-1)} \\ \vdots \\ \Phi_s^{(s-1)} \end{bmatrix}$.

В матрице $\Phi_s^{(s-1)}$ рассмотрим блок $[b_{(s)}^{(s-1)}, H_{\rho_s} b_{(s)}^{(s-1)}, \dots, H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}-1} b_{(s)}^{(s-1)}]$. Разделим каждый столбец этого блока на отличное от нуля число $\lambda_s^{(s-1)} (\sigma - n_{\rho_s} + 1)$, где $\sigma = \sum_{i=1}^s n_{\rho_i}$. Из i -ого ($i < \sigma$) столбца вычтем j -ый ($j = \overline{i+1, \sigma}$) столбец, умноженный на $C_{\sigma-n_{\rho_s}, 1}^{j-i} / \lambda_s^{(s-1) (j-i)}$. В результате, вместо блока $[b_{(s)}^{(s-1)}, H_{\rho_s} b_{(s)}^{(s-1)}, H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}-1} b_{(s)}^{(s-1)}]$ получим блок $[b_{(s)}^{(0)} \dots H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}-1} b_{(s)}^{(0)}]$. Вычитая соответствующие комбинации столбцов последнего блока из предыдущих столбцов матрицы $\Phi_s^{(s-1)}$, в первых $(s-1)$ блоках получим нули (очевидно, что остальные матрицы $\Phi_1^{(s-1)}, \dots, \Phi_{s-1}^{(s-1)}$ не изменяются). С матрицами $\Phi_1^{(s-1)}, \dots, \Phi_{s-1}^{(s-1)}$ поступаем аналогичным образом. Итак, существует невырожденное преобразование столбцов, приводящее матрицу $\Phi^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ к виду

$$\left[\begin{array}{cccc} b_{(1)}^{(0)} H_{\rho_1} b_{(1)}^{(0)} \dots H_{\rho_1}^{n_{\rho_1}-1} b_{(1)}^{(0)} & 0 & \dots & \\ & b_{(2)}^{(0)} \dots H_{\rho_2}^{n_{\rho_2}-1} b_{(2)}^{(0)} & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots \\ & & & \dots b_{(s)}^{(0)} \dots H_{\rho_s}^{n_{\rho_s}-1} b_{(s)}^{(0)} \end{array} \right]$$

Вид последней матрицы (поскольку доказательство приводилось для произвольного столбца b матрицы TB) и доказывает, что соотношение (4) выполняется.

Теперь, используя (4), нетрудно видеть, что проверка критерия (2) сводится к проверке равенств

$$\text{rang} \{B_i, H_{\rho_i} B_i, \dots, H_{\rho_i}^{n_{\rho_i}-1} B_i\} = \rho_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (6)$$

Если же окажется, что и в соотношениях (6) матрицы все же имеют большие размеры, то для их проверки в дальнейшем следует использовать алгоритм, изложенный в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р.— Труды I конгресса ИФАК.— М., 1961, т. 2, с. 521.
 2. Размыслович Г. П.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 1141.
 3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.
- Зак. 81 Бубневич 3-3 нал. Громак

Поступила в редакцию
24.09.81.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 519.76

И. А. КОРОЛЬ

СИНТЕЗ В ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА КАК ЗАДАЧА ИНФОРМАЦИОННОГО ПОИСКА

При решении многих прикладных задач для описания языков (в частности, языки описания данных, алгоритмические и естественные языки) удобно использовать определенные формализмы, так называемые *метаязыки* [1]. Так, для описания синтаксиса языков используют *метасинтаксические языки*.

Наиболее распространенным метасинтаксическим языком являются *нормальные формы Бекуса* (или *металингвистические формулы*), основ-

ное назначение которых представить в сжатом и компактном виде строго формальные и однозначные правила написания основных конструкций описываемого языка.

При разработке систем машинного перевода (МП) на отдельных этапах возникают задачи компактного описания лингвистических данных и алгоритмов анализа и синтеза текстов естественного языка с целью их ввода в память ЭВМ и рациональной автоматической обработки.

Рассмотрим одну из задач для случая разработки системы МП научно-технических текстов в рамках инженерно-лингвистического подхода [2]. На этапе анализа в таких системах [3] каждое входное предложение разбивается на сегменты — семантически связанные и грамматически оформленные совокупности словоформ, устанавливаются формальные, а затем функциональные типы сегментов (сегмент-сказуемое (1), сегмент-подлежащее (2), именной предложный сегмент (3), сегмент союз (4), сегмент-прямое дополнение (5), так называемый «остаточный» сегмент (6)), устанавливается межсегментная зависимость и на ее основе снимается конверсионная и грамматическая омонимия. Поскольку в указанных системах семантика используется фактически только на уровне оборотов, на этапе анализа смысл каждой получаемой информационной структуры устанавливается неоднозначно, поэтому процедура автоматического морфологического и синтаксического синтеза (АСС) [4] основана на сложном взаимодействии свойств информационной структуры, получаемой на этапе анализа, и широких свойств элементов определенного информационного множества $T = \{t_j\}$, ($j = \overline{1, m}$), в качестве которого выступает множество словарных форм (СФ) русского языка. Это взаимодействие фиксируется в виде конечного множества P специальных лингвистических алгоритмов. Задача синтеза основана на сложном взаимодействии свойств заданных структур, поэтому для получения оптимального решения ее надо рассматривать как задачу информационного поиска. Причем в качестве запросов выступают информационные структуры, получаемые на этапе анализа, а в качестве массива поиска — множество специальных лингвистических алгоритмов.

Каждый алгоритм $P_i \subset P$ содержит условие поиска W_i и перечень определенных действий с конечной целью — выбором соответствующих эквивалентов для каждой СФ или совокупности СФ входного языка. Условие поиска W_i можно определить в виде

$$W_i = F_i(f_i^{(1)}(X_i^{(1)}), f_i^{(2)}(X_i^{(2)}), \dots, f_i^{(p_i)}(X_i^{(p_i)})) (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

где функции $f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, \dots, f_i^{(p_i)}$ задают условия поиска отдельных объектов из T ; F_i определяет ту часть условия W_i , которая учитывает необходимые отношения между этими объектами, а $X_i^{(j)} = \{x_{i_1}^{(j)}, x_{i_2}^{(j)}, \dots, x_{i_{k_j}}^{(j)}\}$ —

некоторое подмножество множества $X = \{x_i\}$, ($i = \overline{1, n}$), попарно различных поисковых признаков, которыми являются грамматические коды словоформ. Формальное представление условия поиска позволяет разработать четкий метасинтаксический язык описания данных и построить оптимальный машинный алгоритм поиска.

Функция F_i является функцией многих переменных, и поэтому правило P_i задает для каждого определенного поискового признака $X_i^{(k)}$ ($1 < k \leq p_i$), обозначаемого в дальнейшем через X_0 , конечную последовательность поисковых признаков

$$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \dots, X_i^{(k-2)}, X_i^{(k-1)}, \quad (2)$$

предшествующих X_0 и конечную последовательность поисковых признаков

$$X_i^{(k+1)}, X_i^{(k+2)}, \dots, X_i^{(p_i-1)}, X_i^{(p_i)}, \quad (3)$$

следующих за X_0 . Одновременно для каждого поискового признака указывается набор определенных кодов русских эквивалентов.

В дальнейшем (2) будем называть *левой ситуацией* алгоритма P_i ,

(3) — *правой ситуацией*. Множество значений аргумента $X_i^{(j)}$ ($1 \leq j \leq \leq k-1$) — *левой i -ой цепочкой*, множество значений аргумента $X_i^{(j)}$ ($k+1 \leq j \leq \leq p_i$) — *правой i -ой цепочкой*, множество значений аргумента X_0 — *главной цепочкой*, а каждый элемент $x_0 \in X_0$ — *главным поисковым признаком*. Такой алгоритм $P_i \subseteq P$, что все $X_i^{(j)}$ ($1 \leq j \leq p_i$) однозначны, назовем *элементарным* алгоритмом. Если множество значений хотя бы одного $X_i^{(j)}$ ($1 \leq j \leq p_i$) отлично от единицы, то соответствующий алгоритм будем называть *составным*.

Приведем пример одного из алгоритмов. Если в сегменте (2) для опорного S с кодами 7501, 10001, 10002, ..., 7517, 10037 код первой словоформы в соответствующем лексическом гнезде равен 9001, 8010, 3082, ..., 8018, 9017, то

для S всегда бери из лексического гнезда словоформу с кодами 3026, 9013, 3108, ..., 9011, 3082;

для A (или 12002) — 2808, 2889, 9158, 9122, 9032;

для H (или 12006) — 2233, 1059, 1163, ..., 1527, 2311;

для G (или 12014) — 2203, 2493;

для T — 2233, 1059, 1163, ..., 1735, 1683;

для D — 4501, 4502, 4505, 4506.

Для приведенного алгоритма условие поиска (1) запишется следующим образом:

$$W = F(f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_N)), \quad (1')$$

где $N = 14$. Рассмотрим некоторые свойства функций (1').

$f(X_1)$ — функция *сегментации*: аргумент X_1 принимает значения из множества $\{1, 2, \dots, 6\}$ номеров сегмента.

$f(X_2)$ — *опорная* функция: аргумент X_2 принимает значение из множества $\{S, Q, N\}$ опорных символов.

$f(X_3)$ — функция *1-ой словоформы*: X_3 принимает значения из множества $\{0, 1\}$, где 0 означает код не первой словоформы, 1 — код первой словоформы.

$f(X_n)$ ($n = 4, N$) — *кодовые* функции: X_n принимает значения из множества $\{S, A, 12002, F, 12006, W, 12014, \dots, T, L, \dots, D\}$ поисковых кодов.

Для приведенного выше алгоритма эти функции примут вид:

$$f(X_1) = 2 \quad (4), \quad f(X_2) = 7501 \vee 10001 \vee 1002 \vee \dots \vee 7517 \vee 10037, \quad (5)$$

$$f(X_3) = 9001 \vee 8010 \vee 3082 \vee \dots \vee 8018 \vee 9017, \quad (6)$$

$$f(X_4) = S, \quad f(X_5) = A \vee 12002, \dots, \quad f(X_{14}) = D. \quad (7)$$

Тогда функция F выглядит так:

$$F: f(X_1) \wedge f(X_2) \wedge \dots \wedge f(X_N). \quad (8)$$

При использовании функций (4)–(7) алгоритм, приведенный ранее, запишется следующим образом:

$$F(f(X_1), \dots, f(X_N)) = ((3026 \vee 9013 \vee \dots \vee 3082) \wedge (2808 \vee 2889 \vee \dots \vee 9032) \wedge \dots \wedge (4501 \vee 4502 \vee 4505 \vee 4506)). \quad (9)$$

В (9) функция сегментации $f(X_1)$ представляет собой левую ситуацию алгоритма P_i , $f(X_3), \dots, f(X_N)$ — правую ситуацию, множество значений аргумента X_1 — левую цепочку, X_2 — главную цепочку, X_3, \dots, X_N — правую цепочку. Так как множество значений X_n ($n = \overline{1, N}$) в (9) отлично от единицы, то данный алгоритм будет составным.

Для удобства записи лингвистических алгоритмов и рациональной автоматической обработки их при формировании поискового массива в памяти ЭВМ был разработан метасинтаксический язык $L(G)$, с помощью которого каждый лингвистический алгоритм довольно просто записывается на стандартных бланках записи программ для ЕС ЭВМ в виде от-

дельных фраз. Для описания синтаксиса языка $L(G)$ используется нормальная форма Бекуса [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Братчиков И. Л. Синтаксис языков программирования.— М., 1975.
2. Пиотровский Р. Г. Текст, машина, человек.— Л., 1975.
3. Гончаренко В. В., Добрускина Э. М., Котельникова Н. М., Кричевич В. С., Совпель И. В. Автоматический перевод.— Кишинев, 1978.
4. Король И. А., Совпель И. В. Синтезатор естественного языка в системах машинного перевода.— Тез. докл. на 5-й Республиканской конференции математиков Белоруссии. Гродно, 1980, ч. 1, с. 83.
5. Алгоритмический язык АЛГОЛ-60: Пересмотренное сообщение.— М., 1965.

Поступила в редакцию
15.10.81.

Кафедра МО АСУ

УДК 62-50

А. В. БОРЗЕНКОВ, Р. ГАБАСОВ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА МИНИМАКС

1. Постановка задачи. Пусть X — множество планов x , определенных соотношениями

$$Ax = b, d_* \leq x \leq d^*, \quad (1)$$

где $A = A(I, J)$, $b = b(I)$, $d^* = d^*(J)$, $d_* = d_*(J)$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим функции $V_k(x) = c_k x + f_k$, $k \in K = \{1, 2, \dots, \eta\}$, $c_k = c_k(J) \in R^n$, $f_k \in R$,

$$t_k(x) = \begin{cases} t_k, & \text{если } V_k(x) > V_k^*, \\ 0, & \text{если } V_k(x) \leq V_k^*, t_k > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Качество плана x оценим числом

$$c(x) = t_{l(x)} = \max t_k(x), k \in K. \quad (3)$$

Оптимальным назовем план, на котором функция $c(x)$ достигает минимального значения

$$c(x_0) = \min c(x), x \in X. \quad (4)$$

2. Критерий оптимальности. На плане x определим множество $K(x) = \{j \in K : t_j \leq t_{l(x)}\}$. Из определения индекса $l(x)$ следует, что $t_j(x) = 0$ для всех $j \in K \setminus K(x) = K_-(x)$. Построим матрицу $Q = Q(I \cup K_-(x), J) = \begin{cases} q_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \in I \\ c_{ij}, & i \in K_-(x), j \in J \end{cases} \end{cases}$. Пусть $z = z(J)$ — произвольный n -вектор, удовлетворяющий соотношениям

$$Q(I, J)z(J) = b(I), Q(K_-(x), J)z(J) \leq V^*(K_-(x)) - F(K_-(x)), \quad (5)$$

где $V^* = V^*(K)$, $F = F(K)$ — η -векторы. Под опорой будем понимать пару $\{z, Q_{\text{оп}}\} = P$, где $Q_{\text{оп}} = Q(I_{\text{оп}}^+(x), J_{\text{оп}})$, $I_{\text{оп}}^+(x) = I_{\text{оп}} \cup K_{-\text{оп}}(x)$, — неособая матрица, составленная из элементов q_{ij} , $i \in I^+(x) = I \cup K_-(x)$, $j \in J$, матрицы $Q(I^+(x), J)$. Пару $\{x, P\}$ назовем опорным планом. Опорный план считается невырожденным, если: $Q(K_{-\text{н}}(x), J)z(J) < V^*(K_{-\text{н}}(x)) - F(K_{-\text{н}}(x))$, $d_*(J_{\text{оп}}) < z(J_{\text{оп}}) < d^*(J_{\text{оп}})$, где $K_{-\text{н}}(x) = K_-(x) \setminus K_{-\text{оп}}(x)$. Вычислим вектор потенциалов: $\bar{u}' = \bar{u}'(I_{\text{оп}}^+(x)) = c_{e(x)}(J_{\text{оп}}) \cdot Q_{\text{оп}}^{-1}$ и вектор оценок: $\bar{\Delta}' = \bar{\Delta}'(J) = \bar{u}'(I_{\text{оп}}^+(x), J) - c_{e(x)}$. Введем обозначения: $q_i = Q(i, J)$, $i \in I^+(x)$; $K_-(x) = \{i \in K_-(x), q_i z = V_i^* - f_i\}$; $K_{\sim}(x) = K_-(x) \setminus K_-(x)$; $K_{-\text{оп}}(x) = K_-(x) \cap K_{-\text{оп}}(x)$; $K_{\sim\text{оп}}(x) = K_{\sim}(x) \cap K_{-\text{оп}}(x)$; $J_* = \{j \in J, z_j = d_{*j}\}$; $J^* = \{j \in J, z_j = d_{*j}\}$; $J_{\sim} = J \setminus (J^* \cup J_*)$; $J_{*\text{н}} = J_{\text{н}} \cap J_*$; $J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$.

Теорема 1 (Критерий оптимальности). В задаче (1) — (4) соотношения

$$\bar{\Delta}(J_{*n}) \leq 0, \bar{\Delta}(J_n^*) \geq 0, \bar{\Delta}(J_n^{\sim}) = 0, \bar{u}(K_{-оп}^*(x)) \leq 0, \bar{u}(K_{-оп}^{\sim}(x)) = 0; \quad (6)$$

$$-\sum_{i \in I_{оп}} b_i \bar{u}_i - \sum_{i \in K_{-оп}(x)} (V_i^* - f_i) \bar{u}_i + \sum_{\substack{\Delta J < 0 \\ J \in J_n}} d_{*j} \bar{\Delta}_j + \sum_{\substack{\Delta J > 0 \\ J \in J_n}} d_j^* \bar{\Delta}_j > t_{l(x)} - f_{l(x)} \quad (7)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного плана $\{x, P\}$.

Доказательство. *Достаточность.* Соотношение (6) — достаточное условие оптимальности пары $\{z, Q_{оп}\} = P$, минимизирующей функцию $c_{l(x)}z$ при ограничениях (5) [1]. В левой части соотношения (7) подсчитано значение целевой функции задачи, двойственной к задаче минимизации $c_{l(x)}z$ при ограничениях (5) [1]. Из теории двойственности и соотношений (6), (7) следует, что не существует пары $\{z^1, Q_{оп}^1\} = P^1$ такой, что $c_{l(x)}z^1 \leq t_{l(x)} - f_{l(x)}$ при ограничениях (5). Таким образом, любое допустимое приращение Δx не ведет к уменьшению значения целевой функции $c(x)$.

Необходимость. Пусть $\{x, P\}$ — оптимальный невырожденный опорный план задачи (1) — (4), где пара $\{z^0, Q_{оп}^0\} = P$ минимизирует функцию $c_{l(x)}z$ при ограничениях (5), т. е. для нее выполняются соотношения (6). Пусть для $\{x, P\}$ соотношение (7) не выполнено. Тогда из теории двойственности следует, что $c_{l(x)}z^0 \leq t_{l(x)} - f_{l(x)}$. Полагая $x^1(J) = z^0(J)$, получаем такой новый опорный план $\{x^1, P\}$, что $c(x^1) < c(x)$. *Противоречие.* Теорема 1 доказана.

3. Алгоритм. Пусть x_1 — начальный план. Построим $K_1 = K(x_1)$, $l_1 = l(x_1)$, $K_-^1 = K_-(x_1)$, матрицу $Q_1 = Q(I_1^+, J) = Q(I^+(x_1), J)$.

I этап. Введем вспомогательную задачу

$$c_{l_1} z \rightarrow \min, \quad Q_1(I, J)z(J) = b(I), \quad Q_1(K_-^1, J)z(J) \leq V^*(K_-^1) - F(K_-^1),$$

$$d_*(J) \leq z(J) \leq d^*(J), \quad (3.1)$$

и пусть $z(J)$ — некоторый план этой задачи. Припишем плану $z(J)$ некоторую невырожденную матрицу $Q_{оп}$, сформированную из $Q(I_1^+, J)$. Решаем задачу (3.1) опорным методом, начиная с $\{z, Q_{оп}\}$. Пусть $\{z^k, Q_{оп}^k\}$ — текущий опорный план задачи (3.1), $\beta(z^k, Q_{оп}^k)$ — оценка оптимальности этого опорного плана в задаче (3.1). Возможны следующие случаи: а) $\forall \beta(z^k, Q_{оп}^k), c_{l_1}z^k + f_{l_1} > t_{l_1}$. в) $\exists \beta(z^k, Q_{оп}^k), c_{l_1}z^k + f_{l_1} \leq t_{l_1}$. В случае а), согласно критерию оптимальности, опорный план $\{x_1, P\}$, $P = \{z, Q_{оп}\}$ является решением задачи (1) — (4), $c(x_1) = t_{l_1}$. В случае в) переходим ко второму этапу.

k-й этап. Пусть $\{z, Q_{оп}\}$ — такой ϵ -оптимальный план вспомогательной задачи, составленной на $(k-1)$ -ом этапе, что $c_{l_{k-1}} \tilde{z} \leq t_{l_{k-1}} - f_{l_{k-1}}$. Положим $x_k(J) = z(J)$ и построим $K_k = K(x_k)$, $l_k = l(x_k)$, $K_-^k = K_-(x_k)$, $Q_k = Q(I_k^+, J) = Q(I^+(x_k), J)$. Введем вспомогательную задачу

$$c_{l_k} z \rightarrow \min, \quad Q_k(I, J)z(J) = b(I), \quad Q_k(K_-^k, J)z(J) \leq V^*(K_-^k) - F(K_-^k),$$

$$d_*(J) \leq z(J) \leq d^*(J). \quad (к.1)$$

Пусть $z(J)$ — некоторый план этой задачи. Припишем ему некоторую невырожденную матрицу $Q_{оп}$, сформированную из $Q(I_k^+, J)$. Решаем задачу (к.1) опорным методом аналогично этапу I, начиная с $\{z, Q_{оп}\}$.

Теорема 2. Описанный алгоритм за конечное число этапов строит оптимальный план задачи (1) — (4).

Доказательство следует из того, что в ходе алгоритма выполняются соотношения $K_k \subset K_{k-1}$, $K_k \neq K_{k-1}$.

4. Пример. (Задача о диете). У хозяйки имеется n продуктов. В единице продукта j -го типа содержится a_{ij} единиц питательного вещества i -го типа; b_i — общее количество i -го питательного вещества, которое

должно содержаться в пище. Если для приготовления пищи продукта j -го типа потребуется больше, чем запас V_j^* продукта j -го типа, которым располагает хозяйка, то на докупку продуктов она расходует t_j единиц времени. Требуется так составить рацион приготовления пищи, чтобы на докупку продуктов было истрачено как можно меньше времени.

Исходные данные для решения задачи о диете

Тип продукта $j=1,5$	Количество продукта, имеющегося у хозяйки V_j	Время, необходимое на докупку продуктов t_j	Кол-во единиц питательного вещества i -го типа в единице продукта j -го типа		Ограничения на количество продукта, употребляемого в пищу	
			тип питательного вещества		d_{*j}	d_j^*
			1	2		
1	3,5	1	1	0	1	5,5
2	3,0	1	0	1	1	7
3	2,5	4	0	1	1	6
4	1,9	3	2	1	1	6
5	0,3	2	1	2	0,1	5
Общее количество питательного вещества b_i			9	13		

Рассмотрим числовой пример с данными из таблицы. Построим математическую модель исследуемой задачи, дополнительно задав верхние и нижние границы на количество продукта каждого типа, используемого при изготовлении пищи. Обозначим через x_j количество продукта j -го типа, которое используется при изготовлении пищи.

$$x_1 + 2x_4 + x_5 = 9; \quad x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 13; \quad (5.1)$$

$$1 \leq x_1 \leq 5,5; \quad 1 \leq x_2 \leq 7; \quad 1 \leq x_3 \leq 6; \quad 1 \leq x_4 \leq 6; \quad 0,1 \leq x_5 \leq 5;$$

$$t_1(x) = \begin{cases} 1, & x_1 > 3,5; \\ 0, & x_1 \leq 3,5; \end{cases} \quad t_2(x) = \begin{cases} 1, & x_2 > 3; \\ 0, & x_2 \leq 3; \end{cases} \quad t_3(x) = \begin{cases} 4, & x_3 > 2,5; \\ 0, & x_3 \leq 2,5; \end{cases}$$

$$t_4(x) = \begin{cases} 3, & x_4 > 1,9; \\ 0, & x_4 \leq 1,9; \end{cases} \quad t_5(x) = \begin{cases} 2, & x_5 > 0,3; \\ 0, & x_5 \leq 0,3; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$c(x) = t_{l(x)} = \max \{t_k : x_k > V_k^*\}. \quad (5.3)$$

Требуется найти такое x^0 , что

$$c(x^0) = \min c(x), \quad x \in X. \quad (5.4)$$

Решение. Пусть $x_1 = (2; 3,8; 1,2; 2; 3; 1,3)$ — начальный план. Построим $K_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $l_1 = 4$, $K_1^1 = \{3\}$, матрицу $Q_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I этап. Введем вспомогательную задачу

$$z_4 \rightarrow \min, \quad z_1 + 2z_4 + z_5 = 9; \quad z_2 + z_3 + z_4 + 2z_5 = 13; \quad (1.5)$$

$$1 \leq z_3 \leq 2,5; \quad 1 \leq z_1 \leq 5,5; \quad 1 \leq z_2 \leq 7; \quad 1 \leq z_4 \leq 6; \quad 0,1 \leq z_5 \leq 5;$$

Приписываем плану $z = (2; 3,8; 1,2; 2; 3; 1,3)$, $c(z) = 3$, задачи (1.5)

опору $Q_{оп} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и решаем задачу (1.5) опорным методом. Получим

субоптимальный план $z^0 = (3; 4; 3; 1,2; 1,5; 3; 1,3)$, $c(z^0) = 2$ задачи (1.5). Следуя алгоритму, переходим ко второму этапу. Нетрудно убедиться, что $x^0(J) = z^0(J)$, $c(x^0) = 2$ — оптимальный план задачи (5.1) — (5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. — Минск, 1977—1980, ч. 1—3.

Поступила в редакцию
30.12.81.

Кафедра МОУ

УДК 517.925

В. Х. КОВАЧЕВ

БИЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассматриваем уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены двух независимых переменных x, y с вещественными коэффициентами. Будем считать, что степени P и Q не выше n , хотя бы один из этих многочленов не равен тождественно нулю и что у них нет нетривиального общего делителя. Исследуем поведение интегральных кривых уравнения (1) вблизи особых точек (\bar{x}, \bar{y}) , т. е. точек, где $P(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Сначала попытаемся упростить уравнение (1) при помощи преобразования

$$\left. \begin{aligned} axi + bxv + cyu + dyv &= h \\ Axi + Bxv + Cyu + Dyv &= H \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где u, v — новые переменные; $a, b, c, d, h, A, B, C, D, H$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям, которые перечислим ниже. Нетрудно увидеть, что получаем уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)}, \quad (3)$$

где \tilde{P}, \tilde{Q} вообще являются многочленами степени не выше, чем $2n+2$. Возможен, однако, случай, когда многочлены \tilde{P} и \tilde{Q} имеют общий делитель, и тогда (после сокращения) их степени будут ниже чем $2n+2$.

Постараемся получить информацию о поведении интегральных кривых уравнения (1), исследуя поведение интегральных кривых уравнения (3) и свойства преобразования (2). При этом особенно интересен случай, когда степени P и Q не превышают двух, а степени \tilde{P} и \tilde{Q} не превосходят единицы (или наоборот, так как обратное преобразование имеет тот же самый вид).

$$\text{Вводим обозначение } [a, c] = \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}, \dots, [b, d] = \begin{vmatrix} b & d \\ B & D \end{vmatrix}.$$

Рассматривая (2) как линейную систему относительно x, y , находим

$$x = \frac{[h, c]u + [h, d]v}{R(u, v)}, \quad y = \frac{[a, h]u + [b, h]v}{R(u, v)}, \quad (4)$$

где $R(u, v) = [a, c]u^2 + ([a, d] + [b, c])uv + [b, d]v^2$.

Для того, чтобы мы действительно смогли выразить x, y из (2) через u, v , потребуем, чтобы $R(u, v) \neq 0$, т. е. чтобы одно из чисел $[a, c]$, $[b, d]$ и $[a, d] + [b, c]$ не равнялось нулю. Аналогичным образом потребуем, чтобы из (2) мы могли выразить u, v через x, y . Наконец вычислим якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{\Delta}{R^2(u, v)}, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} [a, h] & [b, h] \\ [h, c] & [h, d] \end{vmatrix}.$$

Потребуем, чтобы $\Delta \neq 0$. Тогда свойства преобразования (2) будут определяться видом множества нулей многочлена $R(u, v)$, т. е. знаком дискриминанта $\delta = ([a, d] + [b, c])^2 - 4[a, c][b, d]$.

Допустим, что степени многочленов P, Q не превосходят единицы: $P(x, y) = a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$, $Q(x, y) = b_{10}x + b_{01}y + b_{00}$.

Будем искать случаи, когда в преобразованном уравнении (3) степени \bar{P} и \bar{Q} не превосходят двух. Выведем также соотношения между коэффициентами \bar{P} и \bar{Q} в этих случаях. Тем самым найдем уравнения вида (3), в которых степени числителя и знаменателя не превосходят двух, и которые некоторым преобразованием вида (2) можно привести к виду (1), где степени числителя и знаменателя не превосходят единицы. Ниже перечислено несколько таких случаев.

Предложение 1: Если выполнено одно из условий

$$\left. \begin{aligned} 4A_{20}B_{02} &= A_{11}B_{11}, \\ 2A_{20}(2A_{02} - B_{11}) + A_{11}(2B_{20} - A_{11}) &= 0, \\ A_{20}^2 + A_{11}^2 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

или

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= A_{11} = 0, \\ 4B_{20}B_{02} + B_{11}(2A_{02} - B_{11}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (ii)$$

то уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{A_{20}u^2 + A_{11}uv + A_{02}v^2}{B_{20}u^2 + B_{11}uv + B_{02}v^2} \quad (5)$$

можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{00}}{b_{00}} \quad (6)$$

(здесь не исключаются случаи $a_{00} = 0$, $b_{00} \neq 0$ и $a_{00} \neq 0$, $b_{00} = 0$).

Следствие. Так как интегральные кривые (6) имеют уравнения $b_{00}y - a_{00}x + C = 0$, находим, что интегральные кривые (5) имеют уравнения $CR(u, v) + \alpha u + \beta v = 0$, где α и β зависят от коэффициентов (5). Эти кривые — конические сечения, вид которых определяется знаком δ , т. е. свойствами преобразования (2).

Предложение 2. Если выполнено одно из условий (i), (ii) либо

$$A_{20} = 0, B_{20} = 2A_{11} \text{ (iii)}, B_{02} = 0, A_{02} = 2B_{11}, \text{ (iv)}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= 0, \\ B_{20}B_{11}^2 - A_{02}B_{11}(2B_{20} - A_{11}) - B_{02}(2B_{20} - A_{11})^2 &= 0, \\ A_{02}^2 + 4B_{20}B_{02} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{02} &= 0, \\ A_{02}A_{11}^2 - B_{20}A_{11}(2A_{02} - B_{11}) - A_{20}(2A_{02} - B_{11})^2 &= 0, \\ B_{20}^2 + 4A_{20}A_{02} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (vi)$$

то уравнение (5) можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{10}x + a_{01}y}{b_{10}x + b_{01}y} \quad (7)$$

(поведение интегральных кривых (7) хорошо изучено).

Предложение 3. Если выполнено одно из условий (i) или (ii), то уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{A_{20}u^2 + A_{11}uv + A_{02}v^2 + A_{10}u + A_{01}v}{B_{20}u^2 + B_{11}uv + B_{02}v^2 + B_{10}u + B_{01}v}$$

можно преобразованием вида (2) привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{10}x + a_{01}y + a_{00}}{b_{10}x + b_{01}y + b_{00}}$$

Поступила в редакцию
06.01.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.926

М. М. ФЕДЕНЯ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КРАТНОГО СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим n -мерную линейную стационарную систему (ЛСС)

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

со спектром $\{\lambda_k(A), k=1, n\}$, где $\lambda_k(A)$ — корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \det[A - \lambda E] = 0$, и возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon E_{ij})x, \quad (2)$$

где E_{ij} — $(0, 1)$ -матрица, единственный ненулевой элемент которой расположен в позиции (i, j) .

Пусть в спектре ЛСС (1) содержится корень $\lambda_s(A)$ кратности l , т. е. справедливы соотношения

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^l \Delta_1(\lambda) \quad (3), \quad \Delta_{ij}(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{m_{ij}} \Delta_{ij}^{(1)}(\lambda), \quad (4)$$

причем $\Delta_1(\lambda_s) \neq 0$, $\Delta_{ij}^{(1)}(\lambda_s) \neq 0$ ($\Delta_{ij}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение к (i, j) -му элементу матрицы $A - \lambda E$).

Составим разность $r_{ij} = l - m_{ij}$, которую в дальнейшем будем называть индексом коэффициента чувствительности. Из равенства $\det[A + \varepsilon E_{ij} - \lambda E] = \Delta(\lambda) + \varepsilon \Delta_{ij}(\lambda)$, указанного в [1], а также из соотношений (3), (4) следует, что при $r_{ij} \leq 0$ характеристическое число $\lambda_s(A)$ нечувствительно [1, 2] к возмущениям матрицы A в позиции (i, j) .

Из результатов [3, с. 219—233], [4, с. 77—85], [2, 5, 6] вытекает, что для системы (2) l корней распадаются на две группы, содержащие возмущенные и невозмущенные корни соответственно, причем число возмущенных корней равно r_{ij} .

Если $r_{ij} = l$, то, следовательно, возникает лишь одна группа, а корни, принадлежащие ей, разлагаются в окрестности $\varepsilon = 0$ в ряды Пуанкаре по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$.

Пусть $\{\lambda_{p_s}(\varepsilon), p_s = \overline{1, r_{ij}}\}$ — группа возмущенных корней. Тогда, как следует из [3, 7], $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ будет r_{ij} — значной аналитической функцией от $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ в окрестности $\varepsilon = 0$, где $r_{ij} \in]0, l]$, $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ — одна из r_{ij} ветвей функции $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$. Изучим детальнее вопрос о разложении $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ в ряд Пуанкаре.

Определим коэффициенты чувствительности k -го порядка $(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]}$ индекса r_{ij} для характеристического числа $\lambda_s(A)$ кратности l следующим рекуррентным соотношением:

$$(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{p_s}(\varepsilon) - \lambda_s(A) - \sum_{m=1}^k (g_{ij}^{(m-1)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} \varepsilon^{\frac{m-1}{r_{ij}}}}{\varepsilon^{\frac{k}{r_{ij}}}}, \quad (5)$$

где $(g_{ij}^{(0)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = 0$, $0 < r_{ij} \leq l$.

Анализируя равенство (5), нетрудно заметить, что $(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]}$ является коэффициентом при $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ в разложении $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ в ряд Пуизье.

Запишем равенство $\Delta(\lambda) + \varepsilon \Delta_{ij}(\lambda) = 0$ в виде $-\varepsilon \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}} = (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}$. Здесь функция $R_{ij}(\lambda, \lambda_s) = -\frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}$ является аналитической. Заменяем уравнение $\varepsilon = \frac{(\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}}{R_{ij}(\lambda, \lambda_s)} ::= L_{ij}(\lambda, \lambda_s)$ следующим: $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}} = \Omega_{ij}(\lambda, \lambda_s)$.

Тогда, используя теоремы 1, 1* [7, с. 141], а также равенство (5), получаем, что $\lambda_{p_s}(\varepsilon)$ является r_{ij} -значной аналитической функцией от $\varepsilon^{\frac{1}{r_{ij}}}$ в окрестности $\varepsilon = 0$ и разлагается в ряд Пуизье следующего вида:

$$\lambda_{p_s}(\varepsilon) = \lambda_s(A) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} \varepsilon^{\frac{k}{r_{ij}}}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} (g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(\frac{\lambda - \lambda_s}{r_{ij} \sqrt[r_{ij}]{L_{ij}(\lambda, \lambda_s)}} \right)^k = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} (R_{ij}(\lambda, \lambda_s))^{r_{ij}} = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(-\frac{\Delta_{ij}(\lambda) (\lambda - \lambda_s)^{r_{ij}}}{\Delta(\lambda)} \right)^{r_{ij}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая равенства (3), (4), из формулы (6) имеем $(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(-\frac{\Delta_{ij}^{(1)}(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \right)^{r_{ij}}$.

З а м е ч а н и е. Введем понятие коэффициента чувствительности $K_{ij}^{(m)}(\lambda_k)$ порядка m , $m > 2$ в случае простого спектра $\{\lambda_k(A), k = 1, n\}$:

$$K_{ij}^{(m)}(\lambda_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k - \sum_{l=1}^{m-1} K_{ij}^{(l)}(\lambda_k) \varepsilon^l}{\varepsilon^m}.$$
 Тогда из формулы (6), равенств (3), (4) и того факта, что для простого спектра $r_{ij} = 1$ (либо 0, но в этом случае $K_{ij}^{(k)}(\lambda_s) = 0$), следует формула для вычисления коэффициентов чувствительности k -го порядка для простого спектра:

$$K_{ij}^{(k)}(\lambda_s) = \frac{1}{k!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(-\frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \right)^k.$$

Пример. Пусть в системе (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda)^3$,

$$\lambda_s(A) = 1, \quad l = 3. \quad [\Delta_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & (\lambda - 1)^2 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу индексов $R = [r_{ij}]$, в которой условимся писать символ « \times » в том случае, когда $\Delta_{ij} = 0$ (если $\Delta_{ij} \neq 0$, то, очевидно,

$$(g_{ij}^{(k)}(\lambda_s))^{[r_{ij}]} = 0): \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times \\ 2 & 1 & \times \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отличные от 0 коэффициенты чувствительности соответствующих индексов вычислим по формуле (6): $(g_{11}(\lambda_s))^{[r_{11}]} = (g_{22}(\lambda_s))^{[r_{22}]} =$

$= (g_{33}(\lambda_s))^{[r_{33}]} = (g_{21}(\lambda_s))^{[r_{21}]} = (g_{32}(\lambda_s))^{[r_{32}]} = (g_{31}(\lambda_s))^{[r_{31}]} = 1$. Коэффициенты чувствительности более высоких порядков равны 0 (ряд Пюизье «обрывается»).

Тогда можно записать разложение, дающее представление о смысле коэффициентов чувствительности

$$[\lambda_p(A + \varepsilon E_{ij})] = [\lambda_s(A)] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{1/3} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{1/2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Феденя М. М. О чувствительности квазихарактеристических чисел и действительных компонент характеристических чисел.— Рукопись деп. в ВИНТИ. № 2466-78. Деп. от 20.07.78.
2. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е. Н. Розенвассера и Р. М. Юсупова.— Л., 1971.
3. Ланкастер П. Теория матриц.— М., 1978.
4. Уилкинсон Д. ж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.— М., 1970.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А.— Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93).
6. Лидский В. Б.— Ж. выч. матем. и матем. физики, 1966, № 1.
7. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.— М., 1968.

Поступила в редакцию
19.03.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 681.3-192

А. Е. ЛЮЛЬКИН

К МИНИМИЗАЦИИ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТОВ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Применение регулярных алгоритмов построения проверяющих тестов комбинационных схем, основанных на переборе неисправностей, приводит в случае больших схем к тестам большой длины. Необходимо отметить, однако, что входные наборы, входящие в тест, построенный с помощью таких широко распространенных методов, как *D*-алгоритм, булево дифференцирование и других, являются, как правило, не полностью определенными, т. е. значения на некоторых входах в наборе являются безразличными. При этом с ростом числа входов и выходов в схеме, как правило, возрастает и степень неопределенности получаемых входных наборов, которая определяется числом входов, на которых значения во входном наборе не определены. В настоящей работе рассматривается метод сокращения длины проверяющего теста, где входные наборы не полностью определены.

Пусть $t_i = (t_1^i, t_2^i, \dots, t_k^i, \dots, t_n^i)$ и $t_j = (t_1^j, t_2^j, \dots, t_k^j, \dots, t_n^j)$ — два входных набора. Здесь $t_k^i, t_k^j \in \{0, 1, x\}$, где x означает, что значение на соответствующем входе не определено; n — число входов в схеме. Будем называть наборы t_i и t_j совместимыми (обозначим $t_i \sim t_j$), если для каждого k выполняется $t_k^i = t_k^j$, если $t_k^i, t_k^j \in \{0, 1\}$. В противном случае, наборы t_i и t_j будем называть несовместимыми. Очевидно, введенное отношение совместимости является рефлексивным ($t_i \sim t_i$), симметричным (из $t_i \sim t_j$ следует, что $t_j \sim t_i$), но не транзитивным (из $t_i \sim t_j$, $t_j \sim t_u$ не следует $t_i \sim t_u$), т. е. не является отношением эквивалентности.

Введем операцию \cap склеивания наборов, которая выполняется как покомпонентная операция над одноименными компонентами наборов согласно следующему правилу:

$t_k^i \backslash t_k^j$	0	1	x
0	0	\emptyset	0
1	\emptyset	1	1
x	0	1	x

Знак \emptyset означает, что соответствующие значения не склеиваются. Если в результате выполнения операции склеивания для наборов t_i и t_j хотя бы одна пара значений одноименных компонент не склеивается, то будем говорить, что наборы t_i и t_j не склеиваются, и обозначать эту ситуацию $t_i \cap t_j = \emptyset$. Очевидно, совместимые наборы, и только они, склеиваются. Кроме того, операция склеивания является симметричной ($t_i \cap t_j = t_j \cap t_i$) и транзитивной ($(t_i \cap t_j) \cap t_u = t_i \cap (t_j \cap t_u)$). Имеет место также следующее утверждение.

Утверждение 1. Наборы t_1, \dots, t_m склеиваются тогда и только тогда, когда они попарно совместимы.

Легко заметить, что справедливо

Утверждение 2. Пусть t_1, \dots, t_m — множество попарно совместимых входных наборов, обнаруживающих множества M_1, \dots, M_m неисправностей, соответственно. Тогда набор, который получается путем склеивания наборов t_1, \dots, t_m обнаруживает все неисправности из множества M_1, \dots, M_m и, возможно, другие неисправности.

Из утверждений 1 и 2 следует, что полнота теста не уменьшится, если некоторое подмножество попарно совместимых наборов, входящих в тест, заменить одним набором, который представляет собой результат склеивания исходных наборов. Таким образом, задача сокращения длины теста может быть сведена к нахождению минимального числа подмножеств попарно совместимых наборов, таких, что любой набор исходного теста принадлежит, по крайней мере, одному подмножеству, и дальнейшей замене каждого из полученных подмножеств набором, представляющим собой результат склеивания входящих в подмножество наборов. Очевидно также, что в качестве подмножеств попарно совместимых наборов достаточно рассматривать максимальные подмножества, т. е. такие, которые не могут быть расширены путем включения некоторых других наборов из исходного теста. В свою очередь, задача поиска всех максимальных подмножеств попарно совместимых наборов может быть сведена к известной в теории графов задаче нахождения максимальных полных подграфов в некотором графе [1]. Напомним, что подграф заданного графа называется полным, если любые две вершины в нем смежны. Полный подграф называется максимальным, если он не является подграфом какого-либо другого полного подграфа заданного графа.

Действительно, пусть вершины неориентированного графа G соответствуют наборам исходного теста. Произвольные две вершины в графе G соединим ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им наборы совместимы. Тогда, как легко заметить, максимальным подмножествам попарно совместимых наборов исходного теста соответствуют максимальные полные подграфы графа G . Известны весьма эффективные алгоритмы нахождения всех максимальных полных подграфов заданного графа [1, 2].

Наконец, задача поиска минимального числа максимальных подмножеств попарно совместимых наборов естественным образом интерпретируется как задача о кратчайшем строчном покрытии булевой матрицы $A = [a_{ij}]$, столбцы которой соответствуют наборам исходного теста, а строки — максимальным подмножествам, и $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, если j -ый набор теста входит в i -ое подмножество. Различные по трудоемкости и качеству получаемого решения алгоритмы решения задачи о кратчайшем покрытии приведены в [2].

Проверяющий тест, полученный из исходного теста, путем замены максимальных подмножеств совместимых наборов результатом их склеи-

вания, может быть подвергнут дальнейшей минимизации с целью построения тупикового теста, т. е. такого теста, каждый набор которого является избыточным. Отметим здесь, что даже если исходный тест был тупиковым, то после применения описанной выше процедуры склеивания он может стать не тупиковым вследствие того, что наборы, представляющие собой результат склеивания, могут обнаруживать такие неисправности, которые не обнаруживаются каждым из склеиваемых наборов в отдельности (см. утверждение 2). По той же причине полнота теста, полученного в результате склеивания некоторых наборов, может вообще превзойти полноту исходного теста, если он не был полным в заданном классе неисправностей. Для построения тупикового теста по тесту, полученному в результате применения процедуры склеивания, может быть использован алгоритм последовательной проверки наборов теста на избыточность [3, с. 285].

Описанный метод сокращения длины проверяющего теста наиболее эффективен тогда, когда исходный тест содержит много слабоопределенных входных наборов, что часто случается при построении тестов для комбинационных схем, содержащих большое число входов и выходов (к таким схемам, например, относятся программируемые логические матрицы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход.— М., 1978.
2. Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов.— М., 1971.
3. Основы технической диагностики. Кн. 1: Модели объектов, методы и алгоритмы диагноза / Под ред. П. П. Пархоменко.— М., 1976.

Поступила в редакцию
19.03.82.

Вычислительный центр

УДК 62—50

В. И. БУЛАТОВ

О СЛИПАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

1. Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x}(t) = \int_0^h [dR(\tau)] x(t - \tau), \quad (1)$$

где x — n -вектор; $R(\tau)$ — $n \times n$ -матрица ограниченной вариации; $h > 0$ — вещественное число. Решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), -h \leq t < 0; x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

где x_0 — постоянный n -вектор; $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная n -вектор-функция, условимся обозначать $x(t, \varphi, x_0)$.

Известно, что два различных решения $x(t, \varphi_1, x_1)$ и $x(t, \varphi_2, x_2)$ системы (1) могут, начиная с некоторого момента времени, совпадать друг с другом: $x(t, \varphi_1, x_1) \equiv x(t, \varphi_2, x_2)$ при $t > t_0$. Такая ситуация называется слипанием решений [1].

Задача. Выяснить, при каких условиях решения $x(t, \varphi_1, x_1)$ и $x(t, \varphi_2, x_2)$ системы (1) слипаются.

З а м е ч а н и е. В силу соотношения $x(t, \varphi_1, x_1) - x(t, \varphi_2, x_2) = x(t, \varphi_1 - \varphi_2, x_1 - x_2)$ вопрос о слипании решений $x(t, \varphi_1, x_1)$ и $x(t, \varphi_2, x_2)$ системы (1) сводится к вопросу о слипании решения $x(t, \varphi, x_0)$, где $x_0 = x_1 - x_2$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, рассматриваемой системы с ее нулевым решением.

Теорема. Для того, чтобы решение $x(t, \varphi, x_0)$ системы (1) слипалось с ее нулевым решением, необходимо и достаточно, чтобы все компоненты n -вектора

$$\left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda\tau} dR(\tau)\right)^{-1} \left(x_0 + \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt\right) \quad (3)$$

являлись целыми функциями комплексной переменной λ .

Отметим основные моменты в доказательстве этой теоремы. Для доказательства необходимости введем n -вектор-функцию $g(\lambda) = \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} x(t) dt$, где $x(t)$ — решение системы (1), соответствующее началь-

ному условию (2) и удовлетворяющее соотношению $x(t) \equiv 0$ при $t > t_0$. Так как каждое решение $x(t, \varphi, x_0)$ системы (1) является кусочно-непрерывным [2], то компонентами $g(\lambda)$ будут целые функции от λ . На осно-

вании (1), (2) нетрудно получить, что $\left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda\tau} dR(\tau)\right) g(\lambda) = x_0 +$

$+ \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt$. Значит, $g(\lambda) = \left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda\tau} dR(\tau)\right)^{-1} \left(x_0 +$

$+ \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt\right)$. Отсюда следует, что компонентами n -век-

тора (3) являются целые функции от λ . Доказательство достаточности основано на возможности применения к решениям $x(t)$ системы (1) преоб-

разования Лапласа [2] $l(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} x(t) dt$, являющегося аналитической

функцией в некоторой области $\text{Re } \lambda > \alpha$. Если решение $x(t)$ удовлетворяет начальному условию (2), то для $l(\lambda)$, как и выше, получаем соотношение

$l(\lambda) = \left(\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda\tau} dR(\tau)\right)^{-1} \left(x_0 + \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau)\right) \varphi(t) dt\right)$. Отсюда в

силу того, что компонентами n -вектора (3) являются целые функции от λ , следует возможность аналитического продолжения $l(\lambda)$ на всю комплексную плоскость. Далее, нетрудно видеть что $|l(i\beta)|^2 = l'(i\beta) \cdot \overline{l(i\beta)} =$

$= O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$ при $\beta \rightarrow \infty$, где β — вещественное число, $i^2 = -1$. Поэтому

интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |l(i\beta)|^2 d\beta$ сходится. Так как степень целой n -вектор-функ-

ции $l(\lambda)$ конечна [2], то получаем, что $l(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Винера — Пэли [3]. Следовательно, $x(t)$ — финитная функция. Значит, для некоторого t_0 , $0 < t_0 < +\infty$, будем иметь: $x(t) \equiv 0$ при $t > t_0$.

2. Полученная выше теорема позволяет, в частности, установить условия управляемости состояния (2) системы

$$\dot{x}(t) = \int_0^h [dR(\tau)]x(t-\tau) + Bu(t), \quad (4)$$

где u — r -вектор-управления; B — постоянная $n \times r$ -матрица.

Определение. Состояние (2) системы (4) называется управляемым, если существуют момент времени t_0 , $0 < t_0 < +\infty$, и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, для которых соответствующее решение $x(t)$ системы (4) с начальным условием (2) удовлетворяет соотношению $x(t) \equiv 0$ при $t > t_0$.

Пусть $\sigma[P(\lambda)]$ означает множество общих (с учетом кратностей) нулей миноров максимального порядка матрицы $P(\lambda)$. Справедливо следующее

Утверждение. Для управляемости состояния (2) системы (4) необходимо, а в случае $B=0$, то и достаточно, чтобы

$$\sigma \left[\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau); B \right] = \sigma \left[\lambda E - \int_0^h e^{-\lambda \tau} dR(\tau); B; x_0 + \int_{-h}^0 \left(\int_{-t}^h e^{-\lambda(t+\tau)} dR(\tau) \right) \varphi(t) dt \right]. \quad (5)$$

Необходимость доказывается так же, как и в [4]. Доказательство же достаточности следует из выше полученной теоремы в силу того, что при $B=0$ условие (5) совпадает с требованием, чтобы все компоненты n -вектора (3) являлись целыми функциями от λ , а система (4) совпадает с системой (1), свойство управляемости решений которой соответствует свойству слипания ее решений с нулевым решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М., 1972.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.
3. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области.— М., 1964.
4. Булатов В. И.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 12, с. 2252.

Поступила в редакцию
27.12.81.

Кафедра высшей математики ФПМ

Краткие сообщения

УДК 621.375.4

В. В. ИЗОХ, В. С. КУРИЛО, В. Д. ТЕЛЕГИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСИЛИТЕЛЕЙ МОЩНОСТИ НА ТРАНЗИСТОРАХ КТ640 И КТ938 В ДВУХПОЛЮСНОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Транзисторы КТ640 и КТ938 в диапазоне длин волн 10 см потенциально неустойчивы. При определенных значениях сопротивления генератора и нагрузки Z_{Γ} и $Z_{\text{н}}$ активные составляющие входа и выхода транзистора $ReZ_{\text{вх}}$ и $ReZ_{\text{вых}}$ становятся отрицательными, что эквивалентно условию $|\Gamma_{\text{вх}}| > 1$ и $|\Gamma_{\text{вых}}| > 1$, где Γ — коэффициент отражения. Нами исследована возможность применения этого свойства транзисторов для усиления мощности.

Выполнен макет усилителя, в котором транзистор мог включаться по схеме четырех- или двухполюсника со стороны коллектора с применением циркулятора типа 7-ЦК-1 (см. рисунок). В последнем случае эмиттерная цепь представляла собой разомкнутый отрезок микрополосковой линии переменной длины.

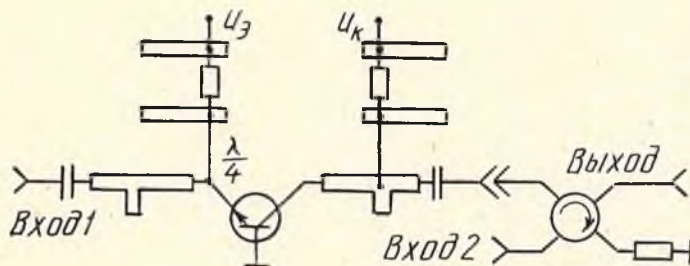


Схема усилителя с двумя возможными входами:
1 — реализует четырех-, 2 — двухполюсное включение транзистора

Измерялись амплитудно-частотные характеристики усилителей с помощью автоматического измерителя КСВ и ослабления с максимальной выходной мощностью 50 мВт и коэффициент шума на установке для калибровки генераторов шума Г1-2.

Эксперимент показал, что при выполнении условия $P_{\text{вых}} \ll P_{\text{вых max}}$ ($P_{\text{вых}}$ — выходная мощность усилителя), одинаковых по количеству реактивных элементов и структуре согласующих цепей и равном коэффициенте усиления, ширина полосы усиления на частотах, близких к предельным, в схеме двух- и четырехполюсного включения транзистора примерно одинаковая. Коэффициент шума при коэффициентах усиления больше 6 дБ в схеме двухполюсного включения хуже на 2—3 дБ. При

уменьшении коэффициента усиления коэффициенты шума обеих схем сближаются.

Схема двухполюсного включения имела преимущества по коэффициенту усиления при выходных мощностях, приближающихся к максимальной выходной мощности транзистора. В этом случае коэффициент усиления в обеих схемах включения снижался до 2—4 дБ. При этом превышение коэффициента усиления схемы двухполюсного включения над схемой четырехполюсного включения для различных экземпляров транзисторов было в пределах 0,5—1 дБ.

Поступила в редакцию
17.06.80.

Кафедра радиофизики и электроники СВЧ

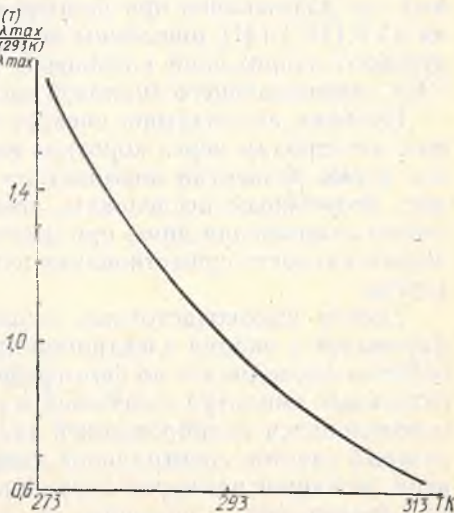
УДК 536.521

Г. Н. ЦЕХАНСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ФОТОПРИЕМНИКА НА ЕГО ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

При выполнении габаритно-энергетических и точностных расчетов ИК-радиометров с неохлаждаемыми полупроводниковыми фотоприемниками особое внимание должно быть уделено такому параметру приемника, как чувствительность, которая сильно зависит от температуры [1]. И. Б. Левитиным и А. И. Концевичем [2] показано, что погрешность измерений в 10 %, выполненных радиометром с неохлаждаемым PbS фотоприемником, возникает уже при изменении температуры окружающей среды на 3°. На практике температурные измерения с помощью радиометра часто приходится выполнять как в лабораторных, так и в полевых условиях, когда температурные перепады окружающей среды могут иметь значительно большую величину. При проектировании радиометра важно знать величину ожидаемой ошибки при использовании его в тех или иных условиях. Решение этой задачи возможно при наличии данных, описывающих зависимость чувствительности фотоприемника от температуры.

Для выяснения этой зависимости был исследован PbS фоторезистор типа 04 АН с приемной площадкой $0,1 \times 0,1$ мм². Исследования проводились в температурном диапазоне 273—313 К; температура приемника поддерживалась на заданном уровне с точностью $\pm 1^\circ$. При различных по интенсивности потоках излучения, посылаемых на фотоприемник, электронная схема регистрации работала в линейном режиме. Измерения проводились на длине волны 2,3 мкм, соответствующей максимуму спектральной чувствительности фотоприемника. При известных значениях температуры на чувствительную площадку приемника посылался поток излучения, интенсивность которого изменялась в известное число раз с помощью калиброванных сеточных ослабителей. Далее предполагалось, что если полный поток $\Phi_{\Delta\lambda}$ вызывает появление электрического сигнала U , а поток, ослабленный в n раз, U_n , то значение абсолютной чувствительности фотоприемника при данной температуре T может быть



Зависимость относительного изменения $S_{\lambda, max}$ от температуры фотослоя

определено как $S_{\lambda \max}^{(T)} = \frac{U - U_n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Phi_{\Delta\lambda}}$. Найденные величины чувствитель-

ности при постоянных $\Phi_{\Delta\lambda}$ и n для различных значений температуры были нормированы к величине чувствительности фотоприемника при температуре 293 К. Полученная зависимость относительного изменения чувствительности от температуры показана на рисунке.

Результаты исследований удовлетворительно согласуются с существующими представлениями о механизме фотопроводимости в полупроводниковых материалах с поликристаллической структурой. Для таких полупроводников процесс тепловой ионизации способствует увеличению концентрации носителей в зоне проводимости и уменьшению времени их жизни, что приводит к увеличению уровня шума, а следовательно, и к снижению чувствительности фотоприемника. Именно это является одной из основных причин увеличения чувствительности фотоприемника с понижением его температуры. Что касается смещения «красной» границы чувствительности фотоприемника, то, как и ожидалось, оно очень мало, и, согласно [3], составляет всего лишь $16 \cdot 10^3$ эВ, и при расчетах может не учитываться.

Полученные результаты использованы при разработке ИК-радиометра на кафедре электрофизики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вафина Д. Г. Фотоэлектрическая автоматика.— Минск, 1966.
2. Левитин И. Б., Концевич А. И.— ИФЖ, 1969, т. 16, № 4.
3. Марков М. Н. Приемники инфракрасного излучения.— М., 1968.

Поступила в редакцию
05.03.81.

Кафедра электрофизики

УДК 537.525.5

В. Е. ГРАКОВ, А. С. МАЙГА

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СПЕКТР ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ НАПРЯЖЕНИЯ ГОРЕНИЯ ВАКУУМНОЙ ДУГИ НА КАДМИИ

Измерения катодного падения и средней продолжительности вакуумных дуг размыкания при наложении на них продольного магнитного поля до 0,115 Тл [1] дополнены исследованием высокочастотных колебаний дугового напряжения кадмиевой дуги с помощью анализатора спектра С4-8, охватывающего диапазон частот до 30 МГц.

Пробник анализатора спектра подключался непосредственно к дуговым электродам через короткие вакуумные вводы. Поскольку самое малое время развертки анализатора спектра С4-8 составляет 0,1 с, оказалось возможным исследовать спектры высокочастотных колебаний дугового напряжения лишь при достаточно больших токах дуги, когда продолжительность существования дуги заметно превосходит это время развертки.

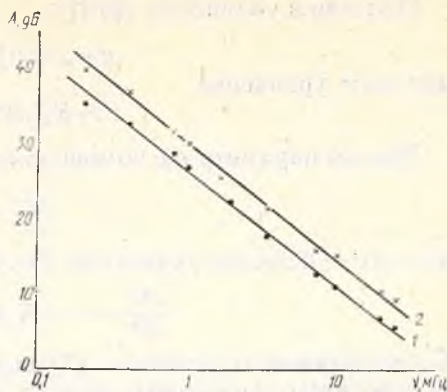
Спектр высокочастотных колебаний дугового напряжения фотографировался с экрана электронно-лучевой трубки, а последующая его обработка проводилась по фотографиям. Для количественной оценки относительных амплитуд колебаний в разных участках частотного диапазона использовался калиброванный входной attenuator, благодаря которому нужный участок спектральной кривой выводился на фиксированный уровень, лежащий примерно посередине области линейного усиления. Частота определялась с помощью плавно перестраиваемых частотных меток.

В результате обработки большого количества фотографий спектров, а также при непосредственных измерениях входным attenuatorом по-

строены графики распределения амплитуд колебаний по частоте (см. рисунок).

Графики распределения, построенные в логарифмическом масштабе по обеим осям, имеют вид спадающих прямых линий, которые могут быть представлены в аналитическом виде с помощью эмпирической формулы $A(\nu) = 42 + 64(i_g/B) - (13,6 + i_g) \lg \nu$, где $A(\nu)$ — относительная интенсивность, дБ; ν — частота, МГц; i_g и B — ток дуги, А, и индукция продольного магнитного поля, Тл, соответственно. Эмпирическая формула хорошо описывает экспериментальные закономерности спектров высокочастотных колебаний напряжения горения Cd-дуго в следующих диапазонах частот, токов дуги и значений индукции продольного магнитного поля: $0,1 \text{ МГц} \leq \nu \leq 25 \text{ МГц}$; $1 \text{ А} \leq i_g \leq 10 \text{ А}$; $B \leq 0,115 \text{ Тл}$.

Общий характер высокочастотного спектра хорошо согласуется с данными работы [2]. По мере продвижения в область больших частот амплитуда колебаний быстро убывает (почти на 4 порядка величины). Увеличение тока дуги наиболее влияет на высокочастотную часть спектра: доля колебаний самых высоких частот уменьшается, в результате наклон графика $A(\nu)$ увеличивается. Продольное магнитное поле увеличивает амплитуды колебаний дугового напряжения по всему частотному спектру в одинаковом отношении, причем его влияние оказывается наиболее сильным при малых токах дуги.



Зависимость относительной амплитуды A от частоты ν в спектре высокочастотных колебаний напряжения горения Cd-дуго ($i_g = 1,6 \text{ А}$):

1 — без внешнего магнитного поля ($B = 0$)
2 — с продольным магнитным полем ($B = 0,1 \text{ Тл}$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Граков В. Е., Майга А. С. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ. мат. и мех., 1981, № 1, с. 27.
2. Skolnik M. I., Puckett H. R. — J. Appl. Phys., 1955, v. 26, № 1, p. 74.

Поступила в редакцию
02.02.82.

Кафедра физической оптики

УДК 517.925

А. А. САМОДУРОВ

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение Абеля второго рода [1]

$$(y + b(x))y' = a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x), \quad (1)$$

где $a_0(x) \neq 0$. Замена $y + b(x) = 1/u$ приводит уравнение (1) к виду

$$u' = f_3(x)u^3 + f_2(x)u^2 + f_1(x)u. \quad (2)$$

Пусть $f_2(x)$, $f_3(x)$ такие рациональные функции комплексного аргумента x , что функции $K_3(x) = f_3(x) \exp(2 \int f_1(x) dx)$, $K_2(x) = f_2(x) \exp(\int f_1(x) dx)$ также являются рациональными. Ниже будут получены достаточные условия наличия решений уравнения (2) вида

$$x = \Phi(p, C), \quad u = \Psi(p, C), \quad (3)$$

где p — комплексный параметр, а функции $\Phi(p, C)$ и $\Psi(p, C)$ не имеют критических подвижных особых точек.

Полагая в уравнении (2) [1]

$$u = z \exp(\int f_1(x) dx), \quad (4)$$

получаем уравнение

$$z' = K_3(x) z^3 + K_2(x) z^2. \quad (5)$$

Введем параметр p с помощью соотношения

$$\frac{dp}{dx} = z(x), \quad (6)$$

где $z(x)$ — решение уравнения (5). Уравнение (5) примет вид

$$-\frac{d^2x}{dp^2} = -K_3(x) - K_2(x) \frac{dx}{dp}. \quad (7)$$

Из автономности уравнения (7) видно, что в его общее решение одна из произвольных постоянных входит аддитивно. Пусть $x = F(p + C_1, C_2)$ — общее решение уравнения (7). Заменяв $p + C_1$ на новое p , будем записывать его в виде $x = F(p, C)$. Тогда общее решение уравнения (2) запишется в виде

$$x = F(p, C), \quad u = \frac{\exp(\int f_1(F(p, C)) F'_p(p, C) dp)}{F'_p(p, C)}. \quad (8)$$

Укажем все те случаи, когда параметрическое представление (8) решений уравнения (2) не имеет критических подвижных особых точек. Для этого заметим, что 2 из 50 канонических уравнений без критических подвижных особых точек имеют вид (7) [2]. Это уравнения

$$\frac{d^2x}{dp^2} = (-3x + q) \frac{dx}{dp} - x^3 + qx^2, \quad \frac{d^2x}{dp^2} = -x \frac{dx}{dp} + x^3 + qx, \quad (9)$$

где q — постоянная (уравнения (9) выбирались с учетом условия $f_3(x) \not\equiv 0$).

Помимо уравнений (9), к интересующему нас типу принадлежат те канонические уравнения, которые заменой в уравнении (7)

$$x = \frac{\alpha_1(p)w + \beta_1(p)}{\alpha_2(p)w + \beta_2(x)}, \quad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0) \quad (10)$$

приводятся к одному из канонических уравнений без критических подвижных особых точек. Производя в (7) замену (10), получаем уравнение

$$w'' = \frac{-2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2\beta_2 - \alpha_2\beta_1} w'^2 + P(p, w, w'), \quad (11)$$

где $P(p, w, w')$ — линейная функция относительно w' , коэффициенты которой — полиномы относительно $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2, w, K_2(x)$ и $k_3(x)$.

Во всех канонических уравнениях коэффициент при w'^2 либо нулевой, либо имеет полюс относительно w . Первому случаю соответствуют уравнения (9). Из вида уравнения (11) следует, что второй случай невозможен.

Подвижные особые точки решений уравнений (9) — не критические полюсы, $\exp(\int f_1(x) dx) = K_2(x)/f_2(x)$ — рациональная функция x , поэтому второе из соотношений (9) не содержит подвижных критических особых точек.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема. Для того, чтобы уравнение (2) с рациональными $K_2(x)$ и $K_3(x)$ имело общее решение вида (3), где $\Phi(p, C)$ и $\Psi(p, C)$ не имеют критических подвижных особых точек, достаточно, чтобы с помощью преобразований (4), (6), (10) оно преобразовывалось в одно из уравнений (9).

Из теоремы следует, в частности, что уравнения $u' = (3x - q) \exp(-2 \int f(x) dx) u^3 + (x^3 - qx^2) \exp(-\int f(x) dx) u^2 + f(x) u$, $u' = -(qx + x^3) \exp(-2 \int f(x) dx) u^3 + x \exp(-\int f(x) dx) u^2 + f(x) u$, где $f(x)$ — произвольная аналитическая функция, интегрируются в квадратурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М., 1971.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.

Поступила в редакцию
18.12.80.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 519.1

А. Н. ИСАЧЕНКО

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ДЛЯ МАТРОИДОВ

Критерии для определения, является ли пара (S, E) матроидом, могут базироваться на различных понятиях: независимых множеств, функций ранга, базиса, стягивающих множеств, функций обхвата, замыкания, поверхностей, гиперплоскостей [1, 2]. В настоящей заметке дается критерий, использующий понятие двойственных систем независимости и «жадного» решения.

Пусть E — непустое конечное множество.

Лемма. Непустая совокупность β подмножеств множества E является семейством базисов матроида на E тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: (*) если $B_1, B_2 \in \beta$, то для любого $x \in B_1 \setminus B_2$ существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такое, что $(B_2 \setminus y) \cup x \in \beta$.

Справедливость леммы вытекает из эквивалентности условия (*) и аксиомы базисов матроида.

Предположим, что пара (S, E) является системой независимости, т. е. S — непустая совокупность подмножеств множества E , замкнутая относительно взятия подмножеств. Ясно, что система независимости однозначно определяется своими множествами максимальной мощности (базисами). Обозначим множество базисов системы независимости (S, E) через $\beta(S, E)$. Двойственной к системе независимости (S, E) назовем систему независимости (S^*, E) с множеством базисов $\beta(S^*, E) = \{E \setminus B : B \in \beta(S, E)\}$.

Пусть на множестве E задана функция $\omega : E \rightarrow R^+$. Вес множества $G \subseteq E$ определим как $\omega(G) = \sum_{e \in G} \omega(e)$. Рассмотрим пару экстремальных задач:

А) найти $G' \in \beta(S, E)$ такое, что $\omega(G) \leq \omega(G') \forall G \in \beta(S, E)$;

В) найти $G^* \in \beta(S^*, E)$ такое, что $\omega(G) \geq \omega(G^*) \forall G \in \beta(S^*, E)$.

Простой алгоритм («жадный» алгоритм) для решения задач А, В, предложенный в [2, 3], состоит в следующем: 1) $G_0 = \emptyset$; 2) Пусть $|E| = n$. Упорядочиваем для задачи А элементы множества E по убыванию, а для задачи В по возрастанию функции ω e_1, e_2, \dots, e_n ; 3) $G_{i+1} = \begin{cases} G_i \cup e_{i+1}, & \text{если } G_i \cup e_{i+1} \in S, \\ G_i & \text{в противном случае;} \end{cases}$ 4) если $i+1 < n$ повторяем 3). Множество G_n называем «жадным» решением.

Пусть G_A — «жадное» решение задачи А, G_B — «жадное» решение задачи В. Известно [2], что решение G_A совпадает с точным тогда и только тогда, когда пара (S, E) является матроидом. Следовательно, если (S, E) — матроид, то для любой функции $\omega : E \rightarrow R^+$

$$\omega(G_A) = \omega(E) - \omega(G_B). \quad (1)$$

Покажем, что справедливо и обратное.

Теорема 1. Пусть (S, E) — система независимости. Если для любой функции $\omega : E \rightarrow R^+$ имеет место равенство (1), то (S, E) — матроид.

Доказательство. Пусть $B_1, B_2 \in \beta(S, E)$ и $x \in B_1 \setminus B_2$. Определим функцию ω следующим образом.

$$\omega(e) = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in E \setminus (B_2 \cup x), \\ v, & \text{если } e = x, \\ u, & \text{если } e \in B_2 \wedge B_1, \\ c, & \text{если } e \in B_2 \setminus B_1, \end{cases}$$

где $v > u > |B_2|c > 0$. Тогда для решения G_A получаем

$$\omega(G_A) \geq v + ku. \quad (2)$$

Здесь $k = |B_1 \cap B_2|$. Если предположить, что не существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такого, что $(B_2 \setminus y) \cup x \in \beta(S, E)$, то $\omega(G_B) \geq u$, что в силу (1), (2) влечет $u \leq |B_2 \setminus B_1|c$. Последнее противоречит выбору функции ω . Следовательно, для семейства $\beta(S, E)$ выполняется условие (*) и в силу леммы пара (S, E) является матроидом.

Из теоремы 1 вытекает следующий критерий

Теорема 2. Непустая совокупность S подмножеств множества E является семейством независимых множеств матроида на E тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) если $G \in S$ и $B \subset G$, то $B \in S$; 2) для всех функций $\omega: E \rightarrow R^+$ для «жадных» решений задач A и B выполняется равенство (1).

ЛИТЕРАТУРА

Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.

2. Welsh D. Matroid theory.— London, New York, San Francisco, 1976.

3. Hausmann D., Korte B., Jenkyns T.— Math. Program. Study, Comb. optim., 1980, v. 12, p. 120.

Поступила в редакцию
15.10.81.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.948.32

С. В. РОГОЗИН

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В данной заметке рассматривается следующая задача: найти функции $\Phi^\pm(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней ($\text{Im } z > 0$) и нижней полуплоскостях, предельные значения которых на вещественной прямой удовлетворяют следующему краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t) \frac{P(t)}{Q(t)} \Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1)$$

При этом

$$P(t) = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(1 - \frac{t}{a_n}\right) e^{\frac{t}{a_n} + \frac{t^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{t^p}{pa_n^p}},$$

$$Q(t) = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(1 - \frac{t}{b_n}\right) e^{\frac{t}{b_n} + \frac{t^2}{2b_n^2} + \dots + \frac{t^q}{qb_n^q}},$$

$\text{Im } a_n = \text{Im } b_n = 0$, p, q равны либо $[\rho_P]$, $[\rho_Q]$, либо $[\rho_P] - 1$, $[\rho_Q] - 1$, где ρ_P, ρ_Q — порядки [1, с. 11] целых функций $P(z), Q(z)$. Для функций $n_{PQ}^*(t)$, определяемых формулами

$$n_{PQ}^*(t) = \begin{cases} n_{PQ}^{(2)}(t), & t \geq 0, \\ -n_{PQ}^{(1)}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

где $n_{PQ}^{(2)}(t)$ — число корней $P(z), Q(z)$ в круге $|z - t/2| < t/2$, а $n_{PQ}^{(1)}(t)$ — число корней $P(z), Q(z)$ в круге $|z + t/2| < t/2$, выполнены условия:

$$1) n_p^*(t) = [\Psi_p(t)|t|^{\rho_p} + 1/2], \quad 0 < \rho_p \leq \rho < \infty, \quad (2)$$

$$2) \Psi_p(t)|t|^{\rho_p} \nearrow,$$

$$3) \Psi_p(t) \in H_\mu[-\infty, \infty], \quad \rho_p/\rho_p + 1 < \mu \leq 1,$$

$$4) |\Psi_p^*(t) \cdot t| < A, \quad A = \text{const}, \quad A > 0,$$

$$5) n_p^*(t) - n_Q^*(t) = \omega(t)|t|^\beta, \quad \omega(-\infty) < 0, \quad \omega(+\infty) > 0, \quad (3)$$

$0 < \beta \leq \min\{\rho, 1 - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ (ρ из (2), (4)).

Функция $G(t)$ определена формулой

$$G(t) = G_0(t) \exp \left\{ \sum_{k=1}^p c_k t^k \right\}, \quad (4)$$

в которой $c_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_Q^*(\tau) - n_P^*(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau$, $k=1, 2, \dots, p$, $G_0(t) = \exp\{2\pi(\psi(t)|t|^\alpha + i\varphi(t)|t|^\rho)\}$, $0 < \rho < \infty$, $0 \leq \alpha \leq \min\{\rho, 1 - \varepsilon\}$ (ρ — то же, что и в (2) и (3)), а $\psi(t)$, $\varphi(t)$ таковы, что $\varphi(t) \in H_\nu[-\infty, \infty]$, $\rho/\rho + 1 < \nu \leq 1$, $\psi(t) \in H[-\infty, \infty]$, причем $\psi(-\infty) > 0$, $\psi(+\infty) > 0$, $(\lambda_2 - \tilde{\Delta}_p^+ + \tilde{\alpha}_2) \times \times (\lambda_1 + \tilde{\Delta}_p^- + \tilde{\alpha}_1) < 0$, где $\lambda_2 = \varphi(+\infty)$, $\lambda_1 = \varphi(-\infty)$,

$$\tilde{\Delta}_p^\pm = \begin{cases} \Psi_p(\pm\infty), & \rho_p = \rho, \\ 0 & \rho_p < \rho, \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \begin{cases} \frac{-\psi(-\infty) + \psi(+\infty) \cos \rho\pi}{\sin \rho\pi}, & \alpha = \rho, \\ 0 & \alpha < \rho, \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \begin{cases} \frac{-\psi(-\infty) \cos \rho\pi + \psi(+\infty)}{\sin \rho\pi}, & \alpha = \rho, \\ 0 & \alpha < \rho. \end{cases}$$

Наконец, $g(0) = 0$, $|g(t)| < B|t|^{-\gamma}$, $|g'(t)| < C|t|^{\rho_p-1-\gamma}$, $\gamma > 0$.

В случае аналога плюс-бесконечного индекса

$$\lambda_2 - \tilde{\Delta}_p^+ + \tilde{\alpha}_2 > 0, \quad \lambda_1 + \tilde{\Delta}_p^- + \tilde{\alpha}_1 < 0 \quad (5)$$

схема решения задачи (1) аналогична схеме, предложенной М. И. Журавлевой [2]. Сначала задача рассматривается при дополнительных условиях

$$g(a_n) = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

и доказывается, что

$$\Phi_0^\pm(z) = \frac{\Psi_0^\pm(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\Psi_0^\pm(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}$$

есть частное ограниченное решение (здесь $\Psi_0^\pm(z)$ — некоторое специальным образом построенное решение однородной задачи [3, 4], соответствующей задаче (1)). Далее исследуется случай, когда хотя бы одно из условий (6) не выполнено. Одно из ограниченных решений здесь таково:

$$\begin{cases} \Phi_0^+(z) = \frac{\Psi_0^+(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) - L^+(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + L^+(z), \\ \Phi_0^-(z) = \frac{\Psi_0^-(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) - L^+(\tau)}{\Psi_0^-(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$L^{\pm}(z) = \Psi_0^{\pm}(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{g(a_n)}{\Psi_0^{\pm}(a_n)(z - a_n)}$$

аналог интерполяционного ряда Лагранжа [2, с. 756]. Общее решение задачи (1)—(5) в обоих случаях имеет вид $\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z) + \Psi^{\pm}(z)$, где $\Psi^{\pm}(z)$ — общее ограниченное решение однородной задачи Римана, соответствующей задаче (1)—(3).

Если же

$$\lambda_2 - \tilde{\Delta}_P^+ + \tilde{\alpha}_2 < 0, \lambda_1 + \tilde{\Delta}_P^- + \tilde{\alpha}_1 > 0 \quad (8)$$

(аналог минус-бесконечного индекса), то доказывается, что задача (1)—(4), (8), вообще говоря, неразрешима в классе ограниченных функций. Решение вида (7) будет ограниченным только при выполнении

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) - L^+(\tau)}{\Psi_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z_n} = 0,$$

где z_n — некоторая последовательность точек верхней полуплоскости ($\text{Im } z_n > 0$).

З а м е ч а н и е. В настоящей работе изложена в основном схема решения задачи и сформулированы результаты. Подготовительные материалы и основные выкладки содержатся в статье автора [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М., 1956.
2. Журавлева М. И. — Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4, с. 755.
3. Рогозин С. В. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае. — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 423-79. Деп. от 01.02.79.
4. Рогозин С. В. О неоднородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом в исключительном случае. — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 424-79. Деп. от 01.02.79.

Поступила в редакцию
29.10.81.

Кафедра теории функций

УДК 517.926

ТАГБИНО ТАМБА

О СОВМЕСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим две дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1), \quad \frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad (2)$$

где f и g заданы в R^{n+1} , причем $f(0; \xi) = g(0, \xi) = 0 \forall \xi \in R^n$. Допустим, что эти системы однозначно разрешимы в окрестности любого начального значения $(t_0; \xi) \in R^{n+1}$ в виде

$$x = x(t, t_0, \xi) \quad y = y(t, t_0, \xi). \quad (3)$$

Назовем системы (1) и (2) совместными в окрестности O^n , если для любых $t_0 \in R$ и $\varepsilon > 0$ существует $\xi \neq O^n$, $|\xi| < \varepsilon$, такое, что решения $x(\cdot, 0, \xi)$ и $y(\cdot, 0, \xi)$ совпадают, т. е. имеют общий промежуток задания I и $x(t, 0, \xi) = y(t, 0, \xi) \forall t \in I$. Введем условия совместности двух стационарных линейных дифференциальных систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4), \quad \frac{dy}{dt} = By. \quad (5)$$

Отметим, что в силу линейности и однородности систем (4) и (5) наличие хотя бы одного ненулевого решения, общего для (4) и (5), обеспечивает совместность систем в окрестности O^n . С помощью непосредственной подстановки и алгебраических преобразований можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1 (необходимое условие совместности). Если $\varphi(t)$ ненулевое решение систем (4) и (5), то $\varphi(t)$ при любом t является собственным вектором матрицы $A-B$, соответствующим нулевому собственному значению.

Пример 1.

Каждая из систем $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$ и $\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} y$ имеет решение

$\Phi(t) = (e^{-2t}; -4e^{-2t})^T$ где T — символ транспонирования. Необходимое условие совместности, выраженное теоремой 1, не является достаточным, как показывает следующий

Пример 2.

Функция $\Phi(t) = (e^t; -2e^t)^T$ не является решением систем $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$,

$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$. Хотя она является собственным вектором матрицы $A-B$, соответствующим нулевому собственному значению.

Теорема 2 (Критерий совместности). Для совместности систем (4) и (5) необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B имели общее собственное значение λ и общий собственный вектор ξ , отвечающий этому собственному значению. Если условие теоремы 2 выполнено, то каждая из систем (4) и (5) имеет решение $\varphi(t) = e^{\lambda t} \xi$. Если же собственное значение λ комплексно, то следует обычным образом (см., например, [1, с. 138]) отделить действительную и мнимую части векторной функции $e^{\lambda t} \xi$, которые и дадут решения каждой из рассматриваемых систем. Отметим, что критерий совместности из теоремы 2 можно выразить в терминах характеристического многочлена матрицы A (или B) (см. [2, с. 230]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям.— Минск, 1977.
2. Воеводин В. В. Линейная алгебра.— М., 1980.

Поступила в редакцию
29.10.81.

Кафедра высшей математики

УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

ОБ ИЗОХРОННОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Рассмотрим вещественную полиномиальную автономную двумерную дифференциальную систему Гамильтона вида $\dot{x} = -y - P_2(x, y) - P_3(x, y)$, $\dot{y} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y)$, которую всегда можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy - 3A_{02}y^2 - A_{30}x^3 - A_{21}x^2y - A_{12}xy^2 - A_{03}y^3, \\ \dot{y} &= x + 3B_{20}x^2 + 2A_{20}xy + \frac{1}{2}A_{11}y^2 + B_{30}x^3 + 3A_{30}x^2y + \\ &\quad + A_{21}xy^2 + \frac{1}{3}A_{12}y^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих серий условий:

$$1. A_{20} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2 \right) A_{02}, \quad A_{11} = 2 \left(\frac{2\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_{02}, \quad B_{20} = -\frac{\alpha}{\beta} A_{02},$$

$$A_{30} = \frac{2\alpha}{\beta^3} A_{02}^2, \quad A_{21} = \frac{6}{\beta^2} A_{02}^2, \quad A_{12} = \frac{6}{\alpha\beta} A_{02}^2, \quad A_{03} = \frac{2}{\alpha^2} A_{02}^2, \quad B_{30} = \frac{2\alpha^2}{\beta^4} A_{02}^2, \\ \text{где } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0. \quad (2)$$

$$2. \quad A_{02} = A_{11} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = A_{03} = 0, \quad B_{30} = 2A_{20}^2.$$

$$3. \quad A_{02} = A_{20} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = B_{30} = 0, \quad A_{03} = \frac{1}{2} A_{11}^2.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) имеет в начале координат изохронный центр. Система (1) при замене переменных

$$x_1 = \alpha x + \beta y, \quad y_1 = -\beta x + \alpha y, \\ \text{где } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (3)$$

сводится к системе

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2 - a_{11}x_1y_1 - a_{32}y_1^2 - a_{30}x_1^3 - a_{21}x_1^2y_1 - a_{12}x_1y_1^2 - a_{03}y_1^3, \\ \dot{y}_1 = x_1 + b_{20}x_1^2 + 2a_{20}x_1y_1 + \frac{1}{2}a_{11}y_1^2 + b_{30}x_1^3 + 3a_{30}x_1^2y_1 + \\ + a_{21}x_1y_1^2 + \frac{1}{3}a_{12}y_1^3, \quad (4)$$

где a, b определяются через α, β, A, B .

Система (4) является изохронной, так как замена (3) не нарушает изохронности центра системы (1). Согласно теореме 10 [1], для системы (4) начало координат должно быть единственной конечной особой точкой в комплексной области (С). Это означает (см., например, [3, с. 436]),

что алгебраическое уравнение $R_{y_1}(x_1) = \sum_{i=1}^9 L_i x_1^i = 0$, где $L_1 = 4a_{12}^2 - 6a_{11}a_{02}a_{12} + 9a_{11}^2a_{03}$, должно иметь единственный корень $x_1 = 0$ в С. Оказывается, что всегда существует α_0 такое, что $L_1(\alpha_0) = 0$, т. е. систему (1) можно «повернуть» так, что для системы (4) $L_1 = 0$.

Отметим, что при $L_1 = 0$ для изохронной системы (4) $a_{12} = a_{03} = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: система (1) при замене переменных типа (3) сводится либо к системе вида

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2, \quad \dot{y}_1 = x_1 + 2a_{20}x_1y_1 + 2a_{20}^2x_1^3, \quad (5)$$

либо к системе вида

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2 - a_{20}^2x_1^2y_1, \quad \dot{y}_1 = x_1 + 2a_{20}x_1y_1 + a_{20}^2x_1y_1^2. \quad (6)$$

Система (5) изохронна, так как для нее $\ddot{x}_1 = -x_1$. Покажем, что система (6) при $a_{20} \neq 0$ имеет в начале координат неизохронный центр. Действительно, согласно теореме 3 [2], получим первое необходимое условие изохронности центра гамильтоновых систем вида (1):

$$18A_{20}^2 + 36A_{20}A_{02} + \frac{9}{2}A_{11}^2 + 90(A_{02}^2 + B_{20}^2) + 18A_{11}B_{20} = \\ = 6A_{21} + 9(A_{03} + B_{30}). \quad (7)$$

Учитывая условие (7), для системы (6) получим $12a_{20}^2 = 0$, но по предположению $a_{20} \neq 0$, т. е. при $a_{20} \neq 0$ условие (7) не выполняется, это доказывает, что система (6) неизохронна.

Заметим далее, что при замене переменных типа (3) система (1) имеет коэффициентные условия (2) такие, что (1) сводится к системе (5).

Достаточность. Пусть для системы (1) выполняется условие (2₂). В этом случае система (1) имеет вид

$$\dot{x} = -y - A_{20}x^2, \quad \dot{y} = x + 2A_{20}xy + 2A_{20}^2x^3. \quad (8)$$

Система (8) изохронна, так как для нее $\dot{x} = -x$. Пусть для (1) выполняется условие (2₃). В этом случае система (1) имеет вид:

$$\dot{x} = -y - A_{11}xy - \frac{1}{2} A_{11}^2 y^3, \quad \dot{y} = x + \frac{1}{2} A_{11} y^2. \quad (9)$$

Система (9) изохронна, так как для нее $\ddot{y} = -y$.

Теперь, пусть (2₁) выполняется для (1). Положим $A_{02} = \alpha\beta^2 a_{20}$. Тогда при замене переменных типа (3) система (1) сводится к системе (5). Это означает, что система (1) изохронна. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно существование функции $z = \alpha x + \beta y$ такой, что в силу (1) $\dot{z} + z \equiv 0$.

С л е д с т в и е 2. Для того чтобы система (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо чтобы она имела единственную конечную особую точку $O(0, 0)$ в S и единственную вещественную особую точку в бесконечности.

С л е д с т в и е 3. Если система (1) имеет единственную особую точку $O(0, 0)$ в S и для нее выполняется условие (7), то она является изохронной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелкин В. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 971.
2. Амелкин В. В., Касим Мухамед Аль-Хайдер.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 3, с. 43.
3. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. Ч. 2: Линейная алгебра и полиномы.— М., 1978.

Поступила в редакцию
19.02.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА E-СИСТЕМ

1. Неприводимость E-систем. Обозначим через P_{al} множество кусочно-постоянных функций, определенных на $[0, +\infty[$, с разрывами разве лишь в точках $t_h = kl$ (k — натуральное, а l — постоянное положительное число) и принимающих только два значения α и $-\alpha$.

Рассмотрим треугольную E-систему (см. [1]):

$$\dot{x} = Px, \quad (1)$$

где матрица $P = (p_{ij})$ такова, что $p_{ij} = 0$ для $i > j$, $p_{ij} \in P_{al}$ для $i \leq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Очевидно, что след матрицы P может принимать лишь конечное число значений, множество которых обозначим через $\{s_k\}$, причем порядок нумерации выберем такой, чтобы $s_1 > s_2 > \dots > s_q$, $1 \leq q \leq n+1$. Положим $T_k = \{t | \text{Sp } P(t) = s_k\}$. Связные компоненты множества T_k , занумерованные в порядке возрастания их левых концов t_i^k , обозначим T_i^k , и пусть $l_i^k = \text{mes } T_i^k$.

Теорема 1. Пусть существует такое k , $k = \overline{1, q}$, что $\{T_i^k\}$ счетное множество, а (l_i^k) — неограниченная последовательность. Тогда при выполнении одного из условий

$$\sum_{i=1}^{k-1} \text{mes } T_i < +\infty \quad (2), \quad \sum_{i=k+1}^q \text{mes } T_i < +\infty \quad (3)$$

система (1) является неприводимой.

Доказательство. Предположим противное, что система (1) приводима. В силу необходимого условия приводимости [2, с. 17] выполняется следующее соотношение: $\int_0^t \text{Sp } P(\tau) d\tau = at + \varphi(t)$, где a — неко-

Торое действительное число, а функция φ ограничена на всем промежутке $[0 + \infty[$.

Нетрудно показать, что в силу неограниченности последовательности (l_i^k) имеет место равенство

$$s_{kl} = a. \quad (4)$$

Если выполнено условие (2), то существует такое натуральное n_0 , что для $t \geq n_0 l$, $\text{Sp } P(t) \neq s_i$ при всех $i = \overline{1, k-1}$; поэтому для любого целого m , $m > n_0$, имеем

$$\int_{n_0 l}^{ml} \text{Sp } P(\tau) d\tau = s_k \sum_{i=1}^{r_0(m)} l_i^k + s_{k+1} \sum_{i=1}^{r_1(m)} l_i^{k+1} + \dots + s_q \sum_{i=1}^{r_{q-k}(m)} l_i^q + f(m), \quad (5)$$

где $r_j = (m)$ число связных компонент множества $T_{h+j} \cap [n_0 l, ml[$, причем, если $r_j(m) = 0$, полагаем $\sum_{i=1}^{r_j(m)} l_i^{k+j} = 0$, функция f ограничена при всех целых m . Таким образом, учитывая (4), получаем

$$\varphi(ml) - \varphi(n_0 l) - f(m) = (s_{k+1} - s_k) \sum_{i=1}^{r_1(m)} l_i^{k+1} + \dots + (s_q - s_k) \sum_{i=1}^{r_{q-k}(m)} l_i^q. \quad (6)$$

Поскольку, по крайней мере, одно из $r_j(m)$ стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$, правая часть (6) стремится к $-\infty$, а левая остается ограниченной при всех целых m .

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы при выполнении условия (2). Аналогично доказывается непригодность системы (1) при выполнении условия (3). Теорема доказана.

Обозначим через $\lambda(t)$ наибольшее собственное число матрицы P , а через $\mu(t)$ ее наименьшее собственное число. Положим $L = \{t \mid \lambda(t) = -\alpha\}$, $M = \{t \mid \mu(t) = \alpha\}$. Из теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие 1. Если множество связных компонент множества L счетно, а последовательность их длин неограничена, то система (1) непригодна.

Следствие 2. Если множество связных компонент множества M счетно, а последовательность их длин неограничена, то система (1) непригодна.

Приведенные результаты являются некоторым обобщением результатов работы [3].

2. Правильность E-систем. Используя критерий правильности систем треугольного вида [4, с. 39], можно получить условия правильности системы (1) в терминах последовательностей длин связных компонент множеств $P_k^+ = \{t \mid p_{kk}(t) = \alpha\}$ и $P_k^- = \{t \mid p_{kk}(t) = -\alpha\}$, а именно: имеет место

Теорема 2. Если для каждой функции p_{kk} число связных компонент множества P_k^+ (P_k^-) бесконечно и выполнены условия

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{l_{k(m+1)}^+ \sum_{i=1}^m l_{ki}^-}{\sum_{i=1}^m (l_{ki}^+ + l_{ki}^-) \left(\sum_{i=1}^m (l_{ki}^+ + l_{ki}^-) + l_{k(m+1)}^+ \right)} = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{l_{ki}^+ - l_{ki}^-}{l_{ki}^+ + l_{ki}^-} = \beta_k, \quad \beta_k \in R, \quad (8)$$

то система (1) является правильной. Здесь (l_{ki}^+) , (l_{ki}^-) — последовательности длин связных компонент множеств P_k^+ и P_k^- соответственно.

Отметим, что, если для некоторых функций p_{kh} число связных компонент множества P_k^+ (P_k^-) конечно, а для остальных выполнены условия теоремы 2, система (1) также является правильной.

Следствие. Если для каждой функции p_{kk} число связанных компонент множества $P_k^+(P_k^-)$ бесконечно и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{I_{ki}^+}{I_{ki}^-}$, то при выполнении условия (7) система (1) будет правильной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1969, № 1, с. 10.
2. Еругин Н. П.—Труды Матем. ин-та имени В. А. Стеклова АН СССР, 1946, т. 13.
3. Мартынов И. И.—Докл. АН БССР, 1967, т. 11, № 9, с. 770.
4. Ляпунов А. М. Собр. соч.—М.—Л., 1956, т. 2.

Поступила в редакцию
19.03.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u_i'(t) = f_i[t, u_1(t), \dots, u_m(t)], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

При построении разностных уравнений, аппроксимирующих (1) на сетке с шагом $\tau > 0$, будем исходить из равенств

$$\hat{u}_i = u_i + \tau \rho_i \varphi_i + \tau \int_0^1 \psi_i(\alpha) \exp[\tau \lambda_i(1-\alpha)] d\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

или

$$\hat{u}_i = u_i + \tau \rho_i^* \hat{\varphi}_i + \tau \int_0^1 \psi_i(\alpha) \exp(-\tau \lambda_i \alpha) d\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где $u_i = u_i(t)$, $\hat{u}_i = u_i(t + \tau)$, $\varphi_i = \lambda_i u_i + b_i$, $\hat{\varphi}_i = \lambda_i \hat{u}_i + b_i$, $\psi_i(\alpha) = f_i[t + \alpha\tau, u_1(t + \alpha\tau), \dots, u_m(t + \alpha\tau)] - \lambda_i u_i(t + \alpha\tau) - b_i$, $\rho_i = [\exp(\tau \lambda_i) - 1]/(\tau \lambda_i)$, $\rho_i^* = [1 - \exp(-\tau \lambda_i)]/(\tau \lambda_i)$, при этом значения констант λ_i и b_i должны выбираться на основании оговоренных ниже требований. Для произвольных λ_i и b_i равенства (2) легко могут быть получены путем выделения и точного обращения линейной части

$$u_i'(t) = \lambda_i u_i(t) + b_i \quad (4)$$

соответствующего дифференциального оператора. Равенства (3) строятся аналогично. В дальнейшем для краткости изложения мы будем иметь в виду преимущественно лишь случай равенств (2).

Если на данном шаге сетки наложить на выбор параметров λ_i , b_i , например, ограничения вида

$$\psi_i(0) = 0, \quad (5)$$

то интегральный член в (2) будет малой величиной порядка τ^2 . Присоединив к (5) требования

$$\psi_i(1) = 0, \quad (6)$$

повысим еще на единицу порядок малости этого члена. Вместо (6) можно использовать и другие требования, скажем, $\psi_i(1/2) = 0$, $\psi_i'(0) = 0$ и т. д. В качестве первоначального требования, вместо (5), можно также использовать другие условия, например, (6) и т. п.

В случае ограничений (5), (6) даже без аккуратной аппроксимации

интеграла в (2), заменив его нулем, приходим к следующему неявному методу второго порядка точности:

$$\hat{y}_i = y_i + \tau \rho_i f_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где $y_i \approx u_i$, $\hat{y}_i \approx \hat{u}_i$, $f_i = f_i(t, y_1, \dots, y_m)$, $\lambda_i = (\hat{f}_i - f_i) / (\hat{y}_i - y_i)$, $\hat{f}_i = f_i(t + \tau, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)$. Подобным же образом на основании (3) строится метод

$$\hat{y}_i = y_i + \tau \rho_i^* \hat{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Методы (7), (8) являются естественным развитием нелинейных методов (10), (12), из [1], точных на уравнениях вида (4).

Пренебрегая, подобно случаю метода (7), интегральным членом в (2), можно построить и примеры явных методов второго порядка точности. Дальнейшего повышения порядка точности методов можно достигать как на пути более полного выделения на каждом шаге точно обрабатываемой части дифференциального оператора, так и через более точную аппроксимацию интегральных членов в (2) или (3). Иногда бывает целесообразным использовать и комбинацию равенств (2), (3). Примеры подобных методов мы здесь приводить не станем, отметим лишь, что при аппроксимации интегралов в (2), (3), естественно, подобно [2], воспользоваться принципом последовательного повышения порядка точности как в варианте постоянной весовой функции, так и для экспоненциальных весов, характерных для интегралов из (2) и (3).

В заключение заметим, что основная идея рассматриваемого подхода к построению методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, основанного на пошаговом выделении и точном обращении главной части дифференциального оператора с последующей аппроксимацией остаточного члена, может быть перенесена на случай уравнений высших порядков, а также использована при построении нелинейных методов численного решения граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 3, с. 61.
2. Бобков В. В.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1967, № 4, с. 27.

Поступила в редакцию
27.05.82.

Кафедра вычислительной математики

УДК 621.396.67.01

А. Е. ПЕТРЯЕВ

НЕКОТОРЫЕ РЕГУЛЯРИЗАТОРЫ В СИНТЕЗЕ СИСТЕМ «АНТЕННА — ОБТЕКАТЕЛЬ»

Задачи синтеза для систем АО относятся к широкому классу задач синтеза в электродинамике — выбора систем источников и отражающих или прозрачных тел, для которых дифрагированное поле обладает требуемыми свойствами [1]. Конкретную систему АО будем задавать множеством математических моделей различного уровня $\mu = (\hat{x}, g_h)$, $h = 1, \dots, M$, где $\hat{x} = (\hat{s}, p)$ — характеристика системы; g_h — оператор излучения, построенный на основе метода h решения прямой задачи об излучении системы. Состояние изолированной системы АО в рамках любой модели из μ задается вектором \hat{x} , который состоит из вектора возбуждения системы источников и конструктивного вектора обтекателя $\vec{p} = (\text{Re } \epsilon_j, \text{Im } \epsilon_j, d_j; j = 1 \dots Q)$.

Функционирование объекта проектирования, которое фиксирует-

ся при включении его в некоторую измерительную систему, будем характеризовать вектор-функцией $\hat{z} = (f_1(\hat{x}) \dots f_k(\hat{x}) \dots f_N(\hat{x}))$ — сверххарактеристикой системы АО. Компоненты \hat{z} — показатели поля излучения и показатели эксплуатационного характера — являются действительными функционалами в пространствах векторов возбуждения и конструктивных векторов и задаются вне зависимости от типа системы АО так, что множество возможных \hat{z} образует линейное пространство Z — фундаментальную структуру при решении любых задач синтеза. Проектное задание формулируется как требование принадлежности сверххарактеристики некоторому множеству $\Delta_z \subset Z$. Задача синтеза заключается в построении соответствующего множества характеристик $\Delta_x = \{x \in X: \hat{z}(x) \in \Delta_z \subset Z\}$. отображение $B: Z \rightarrow X$, с помощью которого строится «проект», должно быть определено для любого проектного задания и для любых направленных семейств проектных заданий Δ_z^0 из сходимости $\Delta_z^0 \rightarrow \Delta_z$ в топологии пространства Z следует сходимость множеств проектных решений $B(\Delta_z^0) \rightarrow B(\Delta_z)$ в топологии X .

Отметим, что реальное проектное задание заключается в требованиях на неполный \hat{z} , т. е. Δ_z принадлежит некоторому подпространству Z . Поэтому необходима классификация проектных заданий в зависимости от типов функционалов f_k , которая заключается в формулировке корректных постановок задач синтеза по требованиям на различные неполные сверххарактеристики.

Рассмотрим корректные постановки задач синтеза для системы АО по требованиям на квадратичные функционалы-компоненты \hat{z} , используя идею многопараметрических регуляризаторов [2]. Пусть имеется задача проектирования по неполной сверххарактеристике, например, сформулированы требования к $1, \dots, L$ компонентам N -ного вектора \hat{z} : Определить

$$\Delta_x = \{x \in J \otimes P: \hat{z}(x) \in \Delta_z = (\gamma_k \leq f_k(x) \leq \beta_k)\}. \quad k = 1, \dots, L \quad (1)$$

Ищем какой-либо один элемент \hat{x} из Δ_x , формулируя специальную вариационную задачу R — регуляризатор.

Пусть все f_k описывают требования к полю излучения системы АО. В этом случае, в зависимости от типов формируемых f_k , необходимо из сверххарактеристики выбрать некоторый дополнительный элемент $f_{0v}(\hat{x})$, определяющий требования эксплуатационного характера и использовать его для конструирования регуляризатора в качестве стабилизирующего функционала. Корректность задачи достигается тем, что система функциональных неравенств (1) решается не во всем $J \otimes P$, а на компактном множестве $\Gamma_a \subset J \otimes P$

$$\Gamma_a = \{x \in J \otimes P: f_{0v}(\hat{x}) \leq a, a > 0\}.$$

Если f_k являются квадратичными в J , то регуляризатор на основе метода Лагранжа можно записать в виде

$$R_1: \inf \left\{ \sum_k f_{ku}(\hat{s}, \vec{p}) + f_{0v}(\hat{s}, \vec{p}) \right\}, \quad u \in S; \quad \hat{j} \in J, \quad \vec{p} = \vec{p}_0$$

$$R_2: \inf \left\{ \sum_k f_{ku}(\hat{s}) + f_{1v}(\hat{s}, \vec{P}) \right\} \quad u \in S; \quad \hat{s} \in J, \quad \vec{p} \in D \subset E^{3Q}$$

$$R_3 = \inf \left\{ \sum_k f_{kp}(\vec{u}) + f_{2v}(\hat{s}) \right\} \quad \vec{u} \in \vec{p}; \quad \hat{s} \in J, \quad \vec{p} \in D \subset E^{3Q}.$$

Задачи $R_1 - R_3$ решаются в пространстве векторов возбуждения. R_1 — наиболее общий вид вариационной задачи уравнения Эйлера, которой есть операторный аналог уравнений Фредгольма II рода и для фиксированного \vec{u} имеющий единственное решение. R_2 — это фактически

задача синтеза подсистемы (А) по ее показателям — формируемым функционалам, «взаимодействие» со второй подсистемой (О) учитывается надлежащим выбором $f_{1v}(\vec{s}, \vec{p})$.

Другими словами, классификация элементов \vec{s} с одинаковыми значениями f_k производится по какому-либо критерию взаимодействия подсистем, например, показателям, которые существенно определяются вектором \vec{p} . R_3 — это регуляризатор оптимального согласования \vec{s} и \vec{p} по критериям, выраженным в (1). Здесь конструктивный вектор \vec{p} является параметром метода решения — параметром управления регуляризатором: $\vec{s} = \vec{s}(\vec{p})$, $\vec{p} \in D \subset E^{3Q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г., Ильинский А. С. — Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 5, с. 1010.
2. Чекин А. В. — Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 4, с. 807.

Поступила в редакцию
05.01.82.

Кафедра радиофизики

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 681.3

М. К. Буза, А. Н. Курбацкий. **Исследование формальных моделей параллельных вычислений, основанных на сетях Петри.** № 5804-81. Деп. от 23.12.81.

Приводится обзор результатов, полученных в последние годы по разработке формальных моделей параллельных вычислений. Исследуются методы описания взаимодействия параллельных процессов, моделирования работы вычислительных систем, анализируются методы проектирования параллельных программ, в частности, с применением аппарата сетей Петри для выражения механизмов управления в программах. Рассматривается связь сетей Петри с системами параллельных подстановок и теорий формальных языков.

УДК 518 : 517(944)947

П. А. Вакульчик, А. И. Кирковский. **Разностные схемы второго порядка точности решения системы уравнений теплопроводности с краевыми условиями второго рода.** № 5805-81. Деп. от 23.12.81.

Изучены разностные схемы второго порядка точности по пространственной переменной и первого или второго порядка по временной переменной для решения системы уравнений теплопроводности с краевыми условиями второго рода. Исследуется сходимость рассматриваемых схем. Полученная в результате аппроксимации исходной задачи разностной схемой система нелинейных разностных уравнений решается методом Ньютона. Доказывается сходимость метода Ньютона к решению системы разностных уравнений.

УДК 518 : 517.9.533.7

П. А. Вакульчик, Н. И. Баурнина. **Исследование консервативных разностных схем типа Лакса — Вендроффа для системы уравнений газовой динамики.** № 5806-81. Деп. от 23.12.81.

Построены разностные схемы типа Лакса — Вендроффа для системы уравнений газовой динамики в лагранжевых массовых координатах для случая изотермического течения идеального газа; при этом все искомые величины отнесены к целым узлам основной сетки. Исследуется сходимость построенных разностных схем. Для реализации системы нелинейных разностных уравнений используется итерационный метод Ньютона и доказывается его сходимость. Все исследования проведены для случая достаточно гладкого решения исходной задачи.

УДК 519.10

А. Д. Корзников. **Грани многогранника транспортной задачи с запретами и ограниченными пропускными способностями.** № 5807-81. Деп. от 23.12.81.

Приводится характеристика и описываются свойства граней многогранника транспортной задачи с запретами и ограниченными пропускными способностями, т. е. множе-

ства $M(a, b, D)_{m \times n} = \left\{ X = \|x_{ij}\|_{m \times n} \mid \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, x_{ij} = d_{ij} = 0, (i, j) \in G_D \subset \{\overline{1, m}\} \times \{\overline{1, n}\}, 0 < x_{ij} < d_{ij}, d_{ij} > 0, (i, j) \in \{\overline{1, m}\} \times \{\overline{1, n}\} \setminus G_D \right\}$. Здесь $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $D = \|d_{ij}\|_{m \times n}$, причем $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Для числа f граней максимальной размерности d мерного многогранника $M(a, b, D)_{m \times n}$ приводится следующая оценка:

$$d + 1 < f < \begin{cases} 6(d - 1), & \text{если } d < \frac{m + n + |P_D|}{5}, \\ d + |P_D| + m + n - 1, & \text{если } d > \frac{m + n + |P_D|}{5}, \end{cases}$$

где $P_D = \{(i, j) \in \{\overline{1, m}\} \times \{\overline{1, n}\} \mid 0 < d_{ij} < \min(a_i, b_j)\}$.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

УДК 519.10

А. Д. Корзников. Об одном классе многопродуктовых транспортных задач. № 5808-81. Деп. от 23.12.81.

Описан класс многопродуктовых транспортных задач и транспортных задач с запретами и ограниченными пропускными способностями, решение которых сводится к решению классической транспортной задачи.

УКК 517.958 : 537.212

Г. Ч. Шушкевич. Электростатическая задача для двух тонких сферических оболочек. № 5809-81. Деп. от 23.12.81.

Решение задачи при помощи теорем сложения и теории парных сумматорных уравнений сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Рассчитаны некоторые электростатические характеристики. Дается полное обоснование предложенного метода.

УКК 621.396.6

М. В. Комар. Содержание и методика лекционных демонстраций по курсу «Основы радиоэлектроники». № 5810-81. Деп. от 23.12.81.

Описаны содержание и методика лекционных демонстраций по курсу «Основы радиоэлектроники». Демонстрационная установка включает в себя унифицированный телевизор, видеоманитофон с передающей телевизионной камерой, универсальный стенд с набором функциональных электронных модулей и осциллограф. Она позволяет демонстрировать укрупнения различных деталей, видеозаписи, осциллограммы напряжений в различных точках электронных схем.

УДК 530.12

М. Н. Полозов, Х. Шебе. К материальным уравнениям релятивистской электродинамики сплошных сред. № 184-82. Деп. от 13.01.82.

Диэлектрические и магнитные характеристики сплошной среды при ее движении во внешнем гравитационном поле находятся как решения некоторого уравнения переноса вдоль мировых линий среды. Этот закон переноса получен в общем виде из требования существования уравнений состояния, в которых учтено перепутывание обобщенных токов, вызванное движением среды в гравитационном поле, и выражается линейным уравнением первого порядка. Показано, что простейший вариант закона переноса — перенос Ли материальных констант. Полученные материальные уравнения учитывают влияние движения среды, ее деформации и внешнего гравитационного поля на диэлектрические и магнитные свойства среды. В частности, из данных соотношений следует, что в жидкости, покоящейся в гравитационном поле Шварцшильда, имеет место анизотропия диэлектрических свойств.

УДК 513

Г. Д. Костадинов. Геодезически параллельные распределения инвариантных связностей и индикатрисы однопараметрических подгрупп. № 185-82. Деп. от 13.01.82.

Приводится условие, которому должна удовлетворять форма инвариантной аффинной связности для того, чтобы инвариантное распределение было геодезически параллельным. Изучается связь с индикатрисами однопараметрических подгрупп.

УДК 535.338

И. В. Липницкий, Н. Л. Рогалевич, И. К. Скутов, Л. Н. Неокладнова, Н. М. Ксенофонтова, Д. С. Умрейко. Спектрально-структурные свойства хлорамминовых комплексов палладия. № 186-82. Деп. от 13.01.82.

Методами ИК и КР спектроскопии исследованы структурные свойства хлорамминовых соединений палладия $Pd(NH_3)_4Cl_2 \cdot H_2O$ цис- и трансизомеры $Pd(NH_3)_2Cl_2$. Смоделировано валентно-силовое поле комплексов и выполнен расчет частот и форм нормальных колебаний на ЭВМ ЕС 1020 по программе с автоматизированным учетом свойств симметрии молекул. Колебательные спектры зарегистрированы в области $30-3600$ cm^{-1} . На основании теоретических и экспериментальных данных установлено наличие цис- и трансвзаимодействия лигандов в смешанных соединениях. Показано, что образование межмолекулярных водородных связей между аминогруппами и галогенами существенно влияет на делокализацию d -электронного облака центрального атома. Последнее проявляется в ослаблении прочности связей металл — лиганд и N—H. Высказаны соображения, что такого рода специфические взаимодействия носят всеобщий характер. Сопоставление данных позволило также установить, что молекула воды в моногидратном тетраамминовом комплексе координирована к палладию, а атомы хлора находятся во внешней сфере.

УДК 519.24

Н. А. Гулякина. **Некоторые оценки интегралов от ядерных функций.** № 187-82. Деп. от 13.01.82.

Получены оценки интегралов третьего и четвертого порядков от ядер Фейера. Результаты могут быть обобщены в широком классе оценок интегралов ядерного типа.

УДК 519.24

Н. А. Гулякина. **О статистике спектра второго порядка, оптимальной в смысле среднеквадратического уклонения.** № 188-82. Деп. от 13.01.82.

Исследуется асимптотическое поведение среднеквадратического уклонения некоторых статистик спектра второго порядка стационарного векторного процесса в предположении, что длина выборки стремится к бесконечности. Приводится точный вид оптимального окна при заданной гладкости спектра второго порядка в исследуемой точке λ .

УДК 517.948.32

В. В. Кашевский. **Нелинейная краевая задача степенного типа на абстрактной римановой поверхности.** № 642-82. Деп. от 11.02.82.

Рассматривается нелинейная краевая задача степенного типа для аналитических функций на римановой поверхности конечного рода. Контур не разбивает поверхность. Решения ищутся в классе ограниченных функций. Получены условия разрешимости и указан алгоритм построения решений задачи.

УДК 535:37

Е. С. Воропай, А. А. Дашутин, В. А. Саечников, А. М. Саржевский. **Спектральные характеристики жестких растворов органических молекул в условиях флукуационного уширения уровней.** № 1308-82. Деп. от 24.03.82.

Экспериментально исследовано влияние флукуационного уширения уровней на спектральные характеристики производных антрацена в жестких растворах. Теоретические расчеты, проведенные численными методами, позволили предложить некоторые критерии определения формы функции распределения флуоресцентных молекул по энергии взаимодействия с окружением. Проведен анализ влияния структуры молекулы люминофора на параметры неоднородного уширения уровней.

УДК 517.946

Ф. А. Кастильо, В. И. Корзюк. **Первая смешанная задача для линейного дифференциального уравнения гиперболического типа второго порядка.** № 1309-82. Деп. от 24.03.82.

Рассматривается следующая задача в некоторой ограниченной области $n+1$ -мерного Евклидова пространства переменных $x=(x_0, x_1, \dots, x_n)$, заключенной между гиперплоскостями $\{x|x_0=0\}$, $\{x|x_0=P\}$ и гиперповерхностью Γ . В области задается общее линейное дифференциальное гиперболическое относительно x_0 уравнение второго порядка. При $x_0=0$ к уравнению присоединяются условия Коши, а на Γ — условие Дирихле. Наряду с указанной рассматривается также и сопряженная к ней задача. Методами функционального анализа доказывается существование и единственность обобщенного решения этих задач.

УДК 517.977.5

В. С. Глушенков. **Построение конечных алгоритмов оптимального управления линейными дискретными системами.** № 1310-82. Деп. от 24.03.82.

Строятся конечные алгоритмы решения задач оптимального управления линейными дискретными системами. При работе алгоритмов учитывается возможная двойственная квазивырожденность задачи.

УДК 62-50:519.2

Н. А. Карпиевич. **Сходимость некоторых стохастических итеративных алгоритмов.** № 1311-82. Деп. от 24.03.82.

Рассматриваются итеративные стохастические алгоритмы, применяемые при решении задач оптимизации, адаптации, обучения и распознавания образов. Приводятся достаточные условия их сходимости почти наверное, в среднем и в среднем квадратическом.

УДК 681.03.06

Нгуен Куанг Тан. Программа обработки микротекстов. № 1312-82. Деп. от 24.03.82.

Предлагается программа для обработки текстов сообщений методом вставки отдельных текстовых единиц (микротекстов) и других переменных величин в перерабатываемые тексты. Реализованы операторы геометрического формирования кадра текста и другие операторы.

УДК 001.812 : 578.147

Н. М. Абрамчук, В. А. Фигурин, М. В. Комар, В. П. Янковский. Принципы построения спецпрактикума по электронным устройствам систем автоматизации научных исследований. № 1324-82. Деп. от 24.03.82.

Приведены принципы построения практикума по электронным устройствам систем автоматизации научных исследований для физических специальностей вузов. Описаны особенности организации практикума, оборудование лаборатории и методика проведения занятий.

УДК 621.391.833 : 621.376 : 621.317.32

В. И. Микулович, Н. Н. Скриган. Исследование флуктуационных помех в опорном сигнале синхронных аналоговых анализаторов спектра. № 1325-82. Деп. от 24.03.82.

Предложен метод исследования погрешности спектрального анализа, вызванной флуктуациями моментов скачкообразного изменения аппроксимирующей функции в анализаторах спектра на основе синхронных детекторов и гетеродинного типа, использующих ступенчатую аппроксимацию гармонического опорного сигнала. Исследованы ограничения на спектр анализируемого сигнала, границы применимости предложенного метода и получено решение, описывающее погрешность спектрального анализа вследствие флуктуаций в опорном сигнале.

УДК 621.396.67

В. И. Демидчик. Применение метода интегральных уравнений для анализа тонко-произвольных структур произвольной геометрии. № 1326-82. Деп. от 24.03.82.

Проведено обобщение интегральных уравнений Халлена и Поклингтона на модели проводников криволинейно-ломаной геометрии. Анализ таких структур предложено проводить на основе интегрального уравнения Поклингтона с использованием кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции токораспределения. Разработаны основанные на свойствах рельефа ядра критерии построения устойчивого решения матричного уравнения, соответствующего интегральному.

УДК 518.5

Л. Н. Батурнина. Определение максимальных потоков при изменении параметров сети. № 1327-82. Деп. от 24.03.82.

Излагается модификация одного метода вычисления величины максимального потока в сети при изменении пропускной способности произвольной дуги. Предложенный алгоритм позволяет определить не только величину максимального потока, но и соответствующие дуговые потоки при уменьшении пропускной способности дуги или вершины сети. Алгоритм использует информацию о максимальном потоке в исходной сети и позволяет решить поставленную задачу за число шагов меньшее или, по крайней мере, не большее, чем при использовании метода пометок в его обычном применении.

УДК 681.3.06 : 51

М. К. Буза, Л. В. Певзнер. Задача проверки контекстных условий процедурно-ориентированных языков. № 1440-82. Деп. от 30.03.82.

Предлагается алгоритм проверки контекстных условий процедурно-ориентированных языков с помощью специальных графово-программных грамматик. Алгоритм может быть применен для выделения не только лексических и синтаксических, но и контекстных ошибок в анализируемом тексте. Алгоритм реализован на языке ПЛ/1 в ОС ЕС ЭВМ.

УДК 519.21

Н. М. Зуев, К. К. Ибрагима. Исследование старших спектральных плотностей стационарных процессов с $a(t, d)$ перемешиванием. № 1971-82. Деп. от 22.04.82.

Получены условия существования и оценки старших спектральных плотностей $a(t, d)$ случайных процессов. Оценки старших спектральных плотностей получены при различных условиях для моментов и скорости изменения функции $a(t, d)$ случайного процесса. Получены также условия аналитичности старших спектральных плотностей.

УДК 535.35

И. М. Козлов, Г. С. Романов, А. В. Тетерев. **О влиянии частиц конденсированной фазы на параметры светозероизонных факелов.** № 1972-82. Деп. от 22.04.82.

Описана теоретическая модель численного решения задачи о действии концентрированных потоков оптического излучения на металлическую преграду. Она включает в себя описание динамики продуктов разрушения металла у поверхности в виде смеси полидисперсной системы частиц конденсированной фазы и паров. Приведены результаты расчетов двух конкретных вариантов задачи воздействия излучения с длиной волны 1,06 мкм на алюминиевую преграду в воздухе с плотностями потока энергии излучения 2 и 10 МВт/см² в одномерном приближении с учетом и без учета частиц. На основе этих результатов производится подробный анализ влияния частиц конденсата на газодинамические и энергетические характеристики светозероизонного факела.

УДК 535.35

Г. С. Романов, Ю. А. Станкевич. **Об особенностях формирования светозероизонного факела при пилковом режиме воздействия на преграду.** № 1973-82. Деп. от 22.04.82.

Рассмотрены особенности формирования светозероизонного факела, возникающего при действии оптического излучения ($\lambda=1,06$ мкм) на поглощающую преграду в воздухе, когда течение носит характер квазистационарной плазменной струи. Приведены результаты численного моделирования факела, образующегося при действии импульса излучения с периодической во времени интенсивностью различной глубины модуляции со средней плотностью потока $q=2$ МВт/см² на висмутовую мишень.

УДК 534.1: 535.33: 541.49

И. А. Хартоник, Г. Г. Новицкий, Т. М. Буслаева, Д. С. Умрейко, Н. М. Синицын. **Теоретический анализ колебательных спектров гексахлорокомплексов Re, Os, Ir и Pt с третиными алифатическими аминами.** № 1974-82. Деп. от 22.04.82.

Исследованы колебательные спектры гексахлорокомплексов Re, Os, Ir и Pt с третиными алифатическими аминами. Теоретически рассчитаны частоты и формы нормальных колебаний трех фрагментов комплекса $\{(C_8H_{17})_3NH\}_2PtCl_6$ и на этой основе проведено отнесение частот спектров всех изученных соединений. Сделаны выводы о механизме взаимодействия внешней сферной органики с внутрисферным анионом и об изомерии соединений.

УДК 548.51-378.147-388

В. Г. Шепелевич. **Разработка лабораторной работы «Выращивание монокристаллов».** № 1975-82. Деп. от 22.04.82.

Приведены методические указания по постановке лабораторной работы «Выращивание монокристаллов». Дано описание установки и методики выращивания монокристаллов по методу Бриджмена.

УДК 548.24-378.147-388

В. Г. Шепелевич. **Разработка лабораторной работы «Двойникование в кристаллах».** № 1976-82. Деп. от 22.04.82.

Приведены методические указания по постановке лабораторной работы «Двойникование в кристаллах». Приведены методики определения индексов плоскости двойникования, создания и выявления двойников.

УДК 517.946

Н. В. Гаврилова. **Задача Коши для обобщенных дифференциально-операторных уравнений типа Эйлера — Пуассона — Дарбу.** № 1977-82. Деп. от 22.04.82.

Рассмотрена задача Коши для обобщенных дифференциально-операторных уравнений типа Эйлера — Пуассона — Дарбу:
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{B(t)}{t^2} \frac{du}{dt} + A(t)u = f(t),$$

$u|_{t=0} = 0, \frac{du}{dt}|_{t=0} = 0$. Здесь u и f — функции переменной $t \in (0, T)$ со значениями в Гильбертовом пространстве H ; $A(t)$ — самосопряженный и равномерно по t положительно определенный оператор в H ; $B(t)$ — линейный замкнутый оператор в H , подчиненный оператору $A^{1/2}(t)$ и удовлетворяющий неравенствам $-\text{Re}(Bv, v)_0 \leq 0, -\text{Re}(Bv, Av)_0 \leq c|A^{1/2}v|_0^2$, где $|\cdot|_0$ и $(\cdot, \cdot)_0$ — норма и скалярное произведение в H ; показатель α удовлетворяет неравенству $0 \leq \alpha \leq 1$.

Методом энергетических неравенств доказаны теоремы существования и единственности сильного решения и непрерывная зависимость его от операторных коэффициентов и показателя α .

УДК 51(091)

А. А. Гусак, Г. М. Гусак. **О работах профессора И. К. Богоявленского по численному интегрированию функций.** № 1978-82. Деп. от 22.04.82.

Дан обзор работ проф. И. К. Богоявленского (1869—1930), посвященных вопросам приближенного вычисления определенных интегралов. В этих работах предложен общий метод нахождения формул приближенного интегрирования функций. Как частные случаи получены формулы трапеций, формулы Симпсона, Котеса, Гаусса, несколько новых формул. Профессор И. К. Богоявленский работал в Горьком сельхозинституте (1919—1925), в Белорусской государственной академии сельского хозяйства имени Октябрьской революции (1925—1930); его статьи опубликованы в трудах этих учебных заведений.

УДК 532.546

А. А. Клевченя. **Аналитическое решение задачи об устойчивости фронтального вытеснения вязко-пластической жидкости вязкой.** № 1980-82. Деп. от 22.04.82.

Рассматривается задача об устойчивости фронтального вытеснения вязко-пластической жидкости вязкой в предположении, что насыщенность перед фронтом и за ним постоянна. Получен закон изменения амплитуды элементарного синусоидального возмущения плоского фронта. Приведены некоторые расчеты критических соотношений вязкостей, определяющих характер вытеснения.

УДК 539.194 : 546.791.4

В. И. Малинка. **Расчет коэффициентов эквивалентных операторов для $5f^2$ -конфигурации с использованием детерминантных функций.** № 1982-82. Деп. от 22.04.82.

Предложен метод расчета коэффициентов эквивалентных операторов в приближении $L-S$ связи. Используется разложение волновых функций состояний атома на слэтеровские одноэлектронные детерминанты. Рассчитаны коэффициенты α_j , β_j , γ_j для всех термов $5f^2$ -конфигурации.

УДК 535.518 : 535.343

С. Е. Яковенко, В. И. Науменко, Ф. А. Душевский, М. В. Никанович. **Измерение анизотропии локального поля нематических жидких кристаллов: МББА.** № 2105-82. Деп. от 29.04.82.

Сообщается о методе измерения анизотропии локального поля нематических жидких кристаллов по спектрам инфракрасного поглощения «сферического» зонда. Приведены результаты измерения тензорного фактора Лоренца в МББА.

РЕФЕРАТЫ

УДК 620.19 : 778.4 : 621.382.002

Николаева А. З., Шулаков В. А., Голикова Н. А., Колесник И. И. **Голографический метод температурных измерений полупроводниковых приборов и интегральных схем.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Описан метод голографической интерферометрии повышенной чувствительности для проведения температурных измерений на поверхности интегральных схем (ИС). В основу построения оптической схемы положены два способа увеличения чувствительности — многоходовый и сопряженных волн. Достигнуто значительное увеличение чувствительности по сравнению с чувствительностью классической двухлучевой схемы голографической интерферометрии. Приведен ряд фотографий температурных полей ИС в окружающем ее воздушном пространстве и пример расчета температуры в различных точках поверхности корпуса ИС.

Библ. 3 назв., ил. 3.

УДК 539.121.7

Тихомирсов В. В. **Спектр излучения каналированных частиц при высоких энергиях.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Показано, что при не слишком высоких энергиях каналированных частиц, когда энергия излучаемых квантов много меньше энергии частицы, возможен переход к классической теории излучения. Исходя из теории магнитотормозного излучения с учетом отдачи получены квазиклассические выражения для спектров излучения каналированных частиц высоких энергий в случае, когда излучаются фотоны с энергией порядка энергии электрона (позитрона).

Библ. 8 назв.

УДК 616-097.612.017

Зорин В. П., Меркулова И. П., Сыкало А. И., Черенкевич С. Н. **Биофизические аспекты взаимодействия онкоцитов и иммуноцитов.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Установлено, что при взаимодействии иммуноцитов с клетками-мишенями изменяется активность неспецифических эстераз и интенсивность иницированной хемилюминесценции. Степень наблюдавшихся изменений различна при использовании лимфоцитов из различных источников и зависит от срока предиммунизации животного клетками-мишенями.

Библ. 12 назв., ил. 1.

УДК 518.74

Астрейко А. П., Голенков В. В. **Внутренний язык систем переработки дискретной информации, построенных на базе многопроцессорных графовых автоматов.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Рассмотрен язык логики семантических сетей, который предлагается в качестве основы внутреннего языка программирования для однородной вычислительной структуры, ориентированной на переработку семантических сетей.

Библ. 11 назв.

УДК 681.142.01

Коляда А. А. **Умножение чисел разных знаков в ядерно-модулярном коде.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Работа посвящена операциям умножения чисел разных знаков (целых чисел и дробей), представленных в ядерно-модулярных системах счисления, и формирования признака мультипликативного переполнения.

Библ. 7 назв.

УДК 01.04 : 621.378

Зенченко С. А. **Лазер на алюмо-иттриевом гранате с неодимом с поляризованным выходом.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Приводятся результаты экспериментального исследования состояний поляризации на выходе лазера на АИГ: Nd с различными поляризаторами в резонаторе. Для увеличения мощности поляризованного излучения и степени его поляризации предлагается использовать анизотропные поляризаторы.

Библ. 9 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 535

Перковский Т. А. **Отражение и пропускание света слоем холестерического жидкого кристалла при нормальном падении.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Проведено численное исследование зависимости коэффициентов отражения, пропускания и поляризации отраженного и прошедшего света от длины волны и поляризации света, падающего нормально на слой холестерического жидкого кристалла (ХЖК). Установлено, что при падении света круговой поляризации на рассматриваемую модель ХЖК происходит возбуждение света противоположной круговой поляризации, в результате отраженный и прошедший свет имеет эллиптическую поляризацию.

Библ. 15 назв., ил. 3.

УДК 621.317.4

Прокошин В. И., Шепелевич В. Г., Ярмолович В. А. **Исследование миниатюрных измерительных структур на основе пленок полуметаллов.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Рассмотрены текстура и физические свойства миниатюрных измерительных структур на основе пленок висмута, сурьмы и их сплава $\text{Bi} - 12 \text{ ат. \% Sb}$. Приведены вольт-амперные характеристики преобразователя Холла, изготовленного на основе пленок полуметаллов.

Библ. 7 назв., ил. 3.

УДК 621.315

Комаров Ф. Ф., Шпилевский Э. М., Гайдук П. И., Горбачевский Д. А. **Характеристики $p-n$ -переходов, полученных при лазерном отжиге ионолегированных слоев кремния.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Пластины кремния (III) ориентации облучались ионами сурьмы ($E=60 \text{ кэВ}$; $D=6,2 \cdot 10^{15} - 1,3 \cdot 10^{16} \text{ ион/см}^2$). Отжиг производился с помощью рубинового лазера с модулированной добротностью ($\tau=15 \text{ нс}$, $\lambda=0,694 \text{ мкм}$). Плотность энергии лазерного излучения изменялась в пределах $0,3 - 2,5 \text{ Дж/см}^2$. Установлено, что наиболее качественные $p-n$ -переходы образуются при имплантации сурьмы дозой $6,2 \cdot 10^{15} \text{ ион/см}^2$ и при дальнейшем отжиге лазером с плотностью энергии $1,1 - 1,6 \text{ Дж/см}^2$. Увеличение дозы легирования не приводит к существенному изменению вольт-амперных характеристик, однако дефектность структуры в оптимальном режиме отжига возрастает.

Библ. 7 назв., ил. 2.

УДК 538

Гусаков В. В. **Оптимизация согласования измерительного резонатора радиоспектрометра.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Решается задача оптимизации связи измерительного резонатора с СВЧ-трактом в спектрометре ЭПР с проходным резонатором. Из полученных аналитических выражений вычислены значения параметров связи с учетом парамагнитного насыщения образца и требований к току детектора СВЧ. Показано, что установка заданного значения мощности СВЧ в измерительном резонаторе с помощью элементов связи и со стороны генератора, и со стороны детектора позволяет оптимизировать чувствительность спектрометра.

Библ. 2 назв., ил. 3.

УДК 621.391.24

Лазарчик А. Н. **Оценка погрешности метода временной дискретизации в теории выбросов случайных процессов.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Проведен анализ погрешности метода временной дискретизации в теории выбросов случайных процессов. Получена верхняя оценка погрешности метода в случае стационарных дифференцируемых гауссовских процессов.

Библ. 2 назв.

УДК 62-50

Размыслович Г. П. **Один метод проверки критерия управляемости.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Указывается метод проверки критерия управляемости линейной стационарной системы в случае, когда матрицы имеют большие размеры.

Библ. 3 назв.

УДК 519.76

Король И. А. **Синтез в определенных системах машинного перевода как задача информационного поиска.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Рассматривается задача автоматического морфологического и синтаксического синтеза для системы машинного перевода научно-технических текстов в рамках инженерно-лингвистического подхода. Предложен метасинтаксический язык для записи специальных лингвистических алгоритмов синтеза.

Библ. 5 назв.

УДК 62-50

Борзенков А. В., Габасов Р. **Алгоритм решения одной специальной задачи на минимакс.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Рассматривается одно обобщение транспортной задачи по критерию времени. Строится алгоритм решения и приводится иллюстрированный пример.

Библ. 1 назв., табл. 1.

УДК 517.925

Ковачев В. Х. **Билинейные преобразования некоторых дифференциальных уравнений с рациональной правой частью.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Рассматриваются некоторые уравнения, где степени числителя и знаменателя в правой части не превосходят двух. Найдены некоторые случаи, когда билинейным преобразованием удастся понизить степени числителя и знаменателя.

УДК 517.926

Феденя М. М. **Об одном методе нахождения коэффициентов чувствительности кратного спектра линейных стационарных систем.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Введено понятие коэффициентов чувствительности k -го порядка индекса χ_y для кратного спектра линейных стационарных систем и указан способ их вычисления.

Библ. 7 назв.

УДК 681.3-192

Людский А. Е. **К минимизации проверяющих тестов логических схем.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Предлагается метод сокращения длины проверяющих тестов логических схем, ориентированный на применение к тестам, которые содержат большое число не полностью определенных входных наборов.

Библ. 3 назв.

УДК 62-50

Булатов В. И. **О слипании решений систем с отклоняющимся аргументом.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Получен критерий слипания решений линейной стационарной системы с отклоняющимся аргументом. Исследована связь слипания решений с их управляемостью.

Библ. 4 назв.

УДК 621.375.4

Изох В. В., Курило В. С., Телегин В. Д. **Исследование усилителей мощности на транзисторах КТ640 и КТ938 в двухполюсном включении.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Приводятся результаты экспериментального сравнения классической схемы включения транзистора в СВЧ усилителях мощности и схемы двухполюсного включения с применением циркулятора. Показано, что в последнем случае коэффициент усиления, при мощностях близких к предельным, больше на 0,5—1 дБ.

Ил. 1.

УДК 536.521

Цеханский Г. Н. **Влияние теплового режима работы фотоприемника на его чувствительность.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Описаны результаты исследования чувствительности фотоприемника на основе сернистого свинца от температуры фотослоя. Полученные результаты использованы при определении точностных характеристик ИК-радиометра, предназначенного для работы в температурном диапазоне окружающей среды от 273 до 313 К.

Библ. 3 назв., ил. 1.

УДК 537.525.5

Граков В. Е., Майга А. С. **Влияние продольного магнитного поля на спектр высокочастотных колебаний напряжения горения вакуумной дуги на кадмии.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Продольное магнитное поле до 0,115 Тл увеличивает амплитуды колебаний дугового напряжения по всему частотному спектру (0,1—25 МГц) в одинаковом отношении, причем его влияние наиболее сильно при малых токах дуги.

Библ. 2 назв., ил. 1.

УДК 517.925

Самодуров А. А. **Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Указаны классы дифференциальных уравнений вида $u' = f_3(x)u^3 + f_2(x)u^2 + f_1(x)u$, общее решение которых: $x = \Phi(p, c)$, $u = \Psi(p, c)$, где $\Phi(p, c)$ и $\Psi(p, c)$ не имеют подвижных критических особых точек.

Библ. 2 назв.

УДК 519.1

Исаченко А. Н. **Об одном критерии для матроидов.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Приводится критерий для определения, является ли система независимости матроидом, использующий понятие двойственных систем независимости и «жадных» решений.

Библ. 3 назв.

УДК 517.948.32

Рогозин С. В. **Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Для указанной задачи выделены ограничения на коэффициенты, при которых либо существует бесконечное число ограниченных решений, либо единственное решение задачи ограничено только при выполнении счетного множества условий разрешимости. В первом случае построено общее решение задачи, во втором — решение и условия разрешимости.

Библ. 4 назв.

УДК 517.926

Тагбино Т. О **совместных дифференциальных системах.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Рассматриваются условия совместности двух стационарных линейных дифференциальных систем.

Библ. 2 назв.

УДК 517.925.12

Касим Мухамед Аль-Хайдер. **Об изохронности гамильтоновых дифференциальных систем второго порядка с полиномами третьей степени.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Выводятся необходимые и достаточные условия наличия изохронного центра первого порядка у гамильтоновых дифференциальных систем с полиномами третьей степени.

Библ. 3 назв.

УДК 517.926.4

Мазаник С. А. **Некоторые свойства E-систем.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Получены достаточные условия неприводимости и правильности линейных дифференциальных систем с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими не более двух значений, и ограниченными снизу длинами промежутков постоянства.

Библ. 4 назв.

УДК 519.62

Бобков В. В. **Об одном семействе методов численного решения жестких дифференциальных уравнений.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Предлагается способ построения методов численного решения задач с начальными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, в том числе жестких, основанный на пошаговом по координатному выделению точно обрабатываемой главной части дифференциального оператора. Приводятся примеры простейших методов.

Библ. 2 назв.

УДК 621.396.67.01

Петряев А. Е. **Некоторые регуляризаторы в синтезе систем «антенна — обтекатель».**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2.

Предлагаются некоторые регуляризаторы, сконструированные из компонент сверххарактеристики системы, отражающие различные подходы к решению задач синтеза подсистем.

Библ. 2 назв.