

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

О. Р. Семенова

МАТРИЧНАЯ ОПТИКА



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Р. Семенова

МАТРИЧНАЯ ОПТИКА

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров и магистров
«Нанотехнологии и микросистемная техника»*



Пермь 2022

УДК 535.5; 535.8

ББК 22.34

С302

Семенова О. Р.

С302 Матричная оптика [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. Р. Семенова ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 2,21 Мб ; 224 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Semenova-Matrichnaya-Optika.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3842-0

Рассмотрены матричный метод расчета центрированных оптических систем, несколько матричных подходов, используемых при описании состояний поляризации световых волн и оптических приборов современной оптики: матричные формализмы Джонса, Стокса-Мюллера и Берремана.

Предназначено для студентов направления подготовки бакалавров и магистров «Нанотехнологии и микросистемная техника» физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета.

УДК 535.5; 535.8

ББК 22.34

*Издается по решению ученого совета физического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра «Металловедение, термическая и лазерная обработка металлов» ПНИПУ (зав. Кафедрой – д-р техн. наук, профессор **Ю. Н. Симонов**);

гл. науч. сотрудник НИИ радиофотоники и оптоэлектроники ПНППК, д-р физ.-мат. наук, профессор **В. В. Криштон**

ISBN 978-5-7944-3842-0

© ПГНИУ, 2022

© Семенова О. Р., 2022

Введение

Часто при упоминании термина «Матричная оптика» подразумевают метод расчета хода световых лучей в параксиальной оптике в центрированных оптических системах. В настоящем издании представлено более широкое понятие «Матричная оптика», как математического аппарата, используемого для расчета оптических систем различной сложности.

Учебное пособие разделено на несколько глав. Первая глава посвящена методам моделирования оптических явлений. Во второй главе рассмотрен метод для расчета хода параксиальных лучей. Предполагается, что лучи распространяются в одной плоскости, поэтому данный формализм может быть успешно применен к планарным системам. Лучи при решении задач описываются положением относительно горизонта, совпадающего с оптической осью системы, и углом наклона относительно этой оптической оси. Два параметра, как две компоненты некоторого вектора, являясь характеристиками любого луча, меняются по мере распространения его через оптическую систему. В параксиальном приближении характеристики луча на входе и выходе из оптической системы связаны линейными алгебраическими уравнениями, которые на языке линейной алгебры могут быть заменены матричными уравнениями. Такой изящный подход, когда характеристики луча задаются векторной величиной, а оптическая система описывается с помощью только одной матрицы, может использоваться и в рамках поляризационной оптики. Этому посвящены следующие три главы.

В третьей и четвертой главах матричные методы используются для описания поляризационных состояний световой волны в рамках подхода Джонса. Рассмотрев предварительно различные состояния поляризации света, сначала введен вектор Джонса, компоненты которого несут информацию об амплитудах и фазах составляющих вектора напряженности электрического поля. Далее описан метод Джонса с использованием комплексных матриц размерности 2×2 , который часто используют при работе с полностью поляризованным светом.

Альтернативный матричный метод векторов Стокса и матриц Мюллера размерности 4×4 , используемый также при решении задач поляризационной оптики, представлен в пятой главе. Метод позволяет решать задачи для поляризованного, частично поляризованного и неполяризованного света. В главе разобраны некоторые практические задачи, продемонстрировано, каким образом параметры Стокса и элементы матрицы Мюллера можно измерять экспериментально, а так же дан полный анализ связи между матричными элементами матрицы Джонса и соответствующими элементами матрицы Мюллера.

В заключительной главе сформулирована задача о прохождении света сквозь многослойную структуру. Для ее решения используется матричный метод Берремана (размерность матриц 4×4), основанный на уравнениях Максвелла. Часто метод Берремана применяют при компьютерном моделировании оптических характеристик анизотропных слоистых структур, таких как жидкокристаллические системы, фотонные кристаллы, тонкопленочные покрытия. Однако использование метода связано с ограничениями, поскольку позволяет описывать распространение монохроматических волн и, следовательно, только когерентные взаимодействия между распространяющимися волнами в слоистых структурах. Кроме того, метод порой требует огромных вычислительных затрат, но с развитием вычислительной техники на сегодняшний день эта трудность с успехом может быть преодолена.

Глава 1

Моделирование оптических явлений

§ 1. Понятие модели в физике. Моделирование

Термин «моделирование» – создание модели («модель» на английском – «model», на французском – «modèle») происходит от латинского «modulus», что означает «мера, образец». Содержание понятий «модель», «моделирование» в различных сферах человеческой деятельности (наука, знание, производство и т.д.) чрезвычайно разнообразно. Общим признаком использования этого термина в различных сферах является то, что модель в том или ином смысле более или менее полно имитирует представляемый объект.

Моделирование – это метод воспроизведения и исследования определённого фрагмента действительности (предмета, явления, процесса, ситуации) или управления им, основанный на представлении объекта с помощью его копии или подобия – модели. Модель обычно представляет собой либо материальную копию оригинала, либо некоторый условный образ, представленный в абстрактной (мысленной или знаковой) форме и содержащий существенные свойства моделируемого объекта. Процедуры создания моделей широко используются как в научно-теоретических, так и в прикладных сферах человеческой деятельности [1].

Различают модели *исследовательские* и *рабочие* (автопилот, протез, кукла и т. п.). С исследовательскими моделями мы и будем работать при изучении данного курса.

Исследовательские модели можно достаточно условно разделить на две группы: *экспериментальные (предметные)* и *теоретические (умозрительные)*.

Экспериментальные модели представляют собой реально осуществляемые устройства двух основных типов:

1. Модели, имеющие ту же природу, что и моделируемый объект. Однако они воспроизводят его упрощенно и, как правило, в измененном масштабе. Эти модели создаются на основе теории подобия и именуются обычно «физическими». Но употребление такого определения является не верным.
2. Аналоговые модели. Они основаны на совпадении математического описания различных явлений.

Отметим, что при разработке любой модели существенным фактом является соответствие между физической точностью модели или теории и точностью математических расчетов. Нарушение такой уравновешенности может привести к неправильной оценке всей работы системы, использующей построенную модель. Поэтому оценка этого соответствия является важнейшим элементом современной физической работы, которая опирается на численные расчеты или вычислительный эксперимент. Следует отметить, что одной и той же физической теории (задаче) может соответствовать различные математические аппараты, которые следует выбирать для оптимального решения поставленной задачи.

Как правило, при моделировании различных физических процессов придерживаются следующего алгоритма, состоящего из нескольких этапов: *постановка задачи – построение математической модели – реализация математической модели – разработка алгоритма решения – программирование – отладка программы – проведение расчетов – анализ результатов.*

Кроме того, следует помнить, что при решении задач приходится иметь дело с различными видами ошибок: ограничения, округления, исходной информации.

Математическая модель, принятая для описания данного процесса или явления, может внести существенные погрешности, если в ней не учтены какие-либо важные исходные данные. И именно исходные данные часто являются основным источником погрешностей. Это так называемые неустраняемые погрешности, так как они не могут быть уменьшены исследователем ни до начала решения задачи, ни в процессе ее решения. Задача исследователя со-

стоит в том, чтобы проанализировать исходные данные для определения их точности, стремясь к тому, чтобы все исходные данные были примерно одинаковой точности.

Ошибки ограничения возникают в результате ограничения бесконечного математического процесса и определяются численными методами, используемыми при решении задач.

В инженерных расчетах при численном моделировании физических явлений используются в основном действительные числа, поэтому их сумма, разность, произведение и частное также являются действительными числами. Поскольку при численном счете результаты арифметических операций над действительными числами округляются, то возникают ошибки округления.

§ 2. Методы моделирования в оптике

Среди численных методов, используемых в процессе проектирования современных оптических компонентов, обычно выделяют две большие группы: универсальные полноволновые и приближенные. Выбор конкретного подхода зависит от соотношения моделируемого объекта с длиной волны и характера распространения электромагнитных волн [2].

Полноволновые методы, основанные на непосредственном решении волновых уравнений для компонент электромагнитного поля при заданных граничных условиях, обычно применяются для разработки оптических микро- и наноприборов. В то время как для проектирования макроскопических систем типа фокусирующих линз, интерферометров и монохроматоров используются приближенные методы. К ним, в частности, можно отнести геометрическую трассировку лучей [2].

К полноволновым методам относят спектральный метод, метод моментов, метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они успешно использовались на протяжении многих лет и активно продолжают применяться в настоящее время в анализе таких важных оптических компонентов, как оптоволоконные структуры, направленные ответвители, кольцевые резонаторы и

т.п. С помощью перечисленных методов инженеры и исследователи могут проводить точный анализ распространения волн в оптических структурах, используя минимальный набор физических допущений. Последние связаны с дискретизацией при преобразовании кусочно-непрерывной оптической среды в цифровую (дискретную) модель [2, 3].

Приближенные методы подразумевают использование некоторых изначальных упрощений или приближений. К этому классу методов относятся такие методы, как трассировка лучей (или геометрическая оптика), гауссова оптика и метод распространения пучка (beam propagation method — BPM). В отличие от полноволнового подхода, при выполнении определенных условий, приближенные методы могут применяться к решению задач на гораздо более крупных объектах [2, 3].

Волноводы в оптических системах обычно имеют одно предпочтительное направление распространения волн. На языке математической физики это означает, что существует определенный волновой вектор, слабо меняющийся или даже остающийся постоянным в направлении распространения. На этом основан новый вычислительный метод — метод огибающей пучка (beam envelope method) [2, 3].

Метод огибающей пучка позволяет значительно увеличить размеры моделей, к которым применимы полноволновые методы. Он заполняет пробел между требовательными к вычислительным ресурсам, но точными конечно-разностными и конечно-элементными схемами и быстрыми приемами трассировки лучей. Подход применим для реальных задач проектирования, что подтверждает успешное решение прикладных задач как из области нелинейной оптики, так и междисциплинарных постановок, например, по расчету модуляторов Маха-Цендера [2, 3].

Метод успешно реализован в программном пакете COMSOL.

Глава 2

Матричные методы в параксиальной оптике

Рассмотрим, каким образом можно применить матрицы для описания геометрического построения изображений в центрированной системе линз, т. е. в системе, состоящей из последовательности сферических преломляющих поверхностей, центры которых расположены на одной оптической оси [4].

Но прежде для простоты построения модели сделаем два главных допущения (приближения):

1. Основное допущение всей геометрической оптики. Оно состоит в том, что длина волны света считается пренебрежимо малой и распространение света можно описывать с помощью отдельных лучей, а не на языке волновых фронтов [4]. В разделе общей физики «Оптика» [5] показано, что в свободном пространстве световые волны распространяются вдоль направления нормалей к волновым фронтам. Понятие геометрического луча представляет собой идеализацию этой волновой нормали. Последнюю на языке векторов можно рассматривать либо как вектор Пойнтинга электромагнитного поля, либо как градиент некоторой скалярной функции (эйконала), которая описывает фазу волнового возмущения. Из этих представлений следует принцип наикратчайшего оптического пути Ферми, которому подчиняется каждый луч. Суть этого принципа заключается в следующем. Если мы рассмотрим окрестность любого небольшого участка траектории луча, то луч выбирает такой путь между двумя точками, который соответствует минимуму времени, затрачиваемому на прохождение расстояния между этими точками [4].
2. Второе наше приближение состоит в том, что мы будем рассматривать лишь параксиальные лучи, – лучи, которые при

своим прохождении через оптическую систему остаются близкими к ее оси симметрии и почти параллельными ей. Тогда для синусов и тангенсов любых углов, образуемых этими лучами с оптической осью, можно использовать первый порядок разложения в ряд. Следовательно, эффекты третьего порядка, такие как сферическая абберрация или кома (сферическая абберрация наклонных пучков), а также астигматизм, кривизна поля и дисторсия, выпадают из поля зрения этого анализа [4].

§ 1. Матрицы преобразования лучей

Обсудим прохождение параксиального луча через центрированную систему линз. Введем общепринятую в современной оптике систему декартовых координат (см. рис. 2.1): ось z , совпадающую с оптической осью системы, а также с главным направлением, вдоль которого распространяются лучи света, направим слева направо; ось y будем считать расположенной в плоскости рисунка и направленной вверх, а ось x перпендикулярной плоскости yz . Будем рассматривать лучи, лежащие в плоскости yz в непосредственной близости от оси z .

Траектория луча, поскольку он проходит через различные преломляющие поверхности системы, будет состоять из последовательности прямых линий. Каждая из этих прямых определяется координатами одной принадлежащей ей точки и углом, который составляет данная прямая линия с осью z . Выберем заранее любую плоскость $z = \text{const}$, перпендикулярную оси z , и назовем ее опорной плоскостью (ОП). Тогда луч можно определить по отношению к опорной плоскости двумя параметрами: высотой y , на которой этот луч пересекает опорную плоскость, и углом, который он составляет с осью z . Угол v измеряется в радианах и считается положительным, если он соответствует вращению против часовой стрелки от положительного направления оси z к направлению, в котором свет распространяется вдоль луча (рис. 2.1) [4].

Можно, конечно, описывать все лучи, участвующие в вычислениях, по отношению к одной (единственной) опорной плоскости

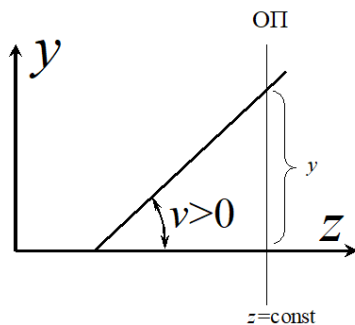


Рис. 2.1. Система координат при решении задач

(например, взять в качестве ОП плоскость $z = 0$), однако на практике оказывается гораздо более удобно на каждом этапе расчета выбирать новую ОП. Это означает, что параметры луча непрерывно переносятся с одной ОП на другую по мере того, как мы рассматриваем различные элементы системы. Однако, если требуется выполнить полный расчет системы в целом, то возникает вопрос о полной матрице преобразования лучей, которая преобразовывала бы все необходимые параметры луча от выбранной нами входной ОП непосредственно к выбранной выходной ОП.

Выше уже отмечалось, что по отношению к любой ОП положение луча можно определить с помощью высоты y и угла v этого луча. Однако для проведения расчетов более удобно заменить угол луча v соответствующим ему оптическим направляющим косинусом $V = nv$ (или, точнее говоря, $V = n \sin v$), где n – показатель преломления среды, в которой распространяется луч, так как согласно закону Снеллиуса оптический направляющий косинус остается неизменным при пересечении граничной поверхности двух оптически различных сред.

Поскольку луч проходит через систему преломляющих линз, то для исследования его поведения необходимо рассмотреть только два основных процесса:

1. *Перемещение* между двумя преломляющими поверхностями – оптический промежуток. На таком участке пути луч, предоставленный самому себе, просто проходит по прямой линии от одной преломляющей поверхности к другой. Область между поверхностями характеризуется ее толщиной t и показателем преломления n среды, через которую проходит луч.

2. *Преломление* на граничной поверхности между двумя областями с различными показателями преломления. Для того чтобы определить величину отклонения прошедшего луча, необходимо знать радиус кривизны преломляющей поверхности и два значения показателя преломления граничащих сред.

Далее мы рассмотрим, каким образом эти два основных процесса влияют на значения величин y и V луча, проходящего от одной опорной плоскости к другой, между которыми расположен оптический элемент. Вначале луч пересекает ОП₁ и имеет на ней значения параметров y_1 и V_1 , затем он проходит через оптический элемент и, наконец, достигает ОП₂, на которой он характеризуется высотой y_2 и углом V_2 . Найдем уравнения, устанавливающие связь величин y_2 и V_2 с величинами y_1 и V_1 и свойствами оптического элемента, расположенного между опорными плоскостями.

Уравнения для двух оптических элементов (преломляющая поверхность и оптический промежуток), которые являются линейными, можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix},$$

причем матричные элементы таковы, что определитель $AD - BC = 1$ [4].

С другой стороны, если нам понадобится рассмотреть такой случай, когда луч проходит через систему в обратном направлении, то матричное уравнение обращается и принимает вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждому элементу оптической системы можно поставить в соответствие свою унимодулярную матрицу преобра-

зования лучей. Для того чтобы получить общую матрицу преобразования лучей, описывающую всю оптическую систему в целом, следует перемножить в правильной последовательности все матрицы элементарных перемещений и преломлений, встречающихся в системе. Такая система может представлять собой все что угодно, начиная от единственной тонкой линзы и кончая сложной оптической системой [4].

§ 2. Матрица перемещения, матрица преломления и матрица отражения

Матрица перемещения

На рис. 2.2 приведены два примера распространения лучей, проходящих слева направо путь t между двумя опорными плоскостями. Очевидно, что угол, под которым распространяются лучи, остается тем же самым на протяжении всего перемещения, в то время как его расстояние до оси z меняется.

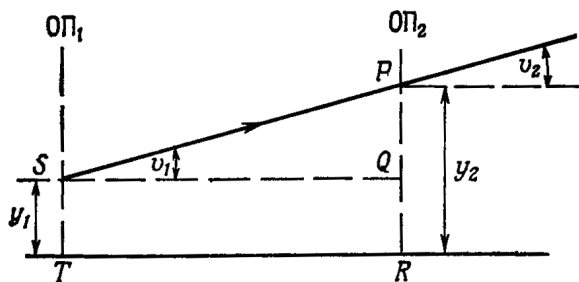


Рис. 2.2. Пример распространения лучей между двумя опорными плоскостями [4]

На рис. 2.2 показан случай, когда величины $y > 0$ и $v > 0$. Для случая, когда $y > 0$, а угол $v < 0$, вывод матрицы перемещения будет аналогичен. Следует отметить, что углы v на рис. 2.2 даны в увеличенном масштабе; в действительности максимальные

значения величины v для параксиальных лучей не превышают 0.1 (одной десятой радиана, или около 6°). При этом погрешность вычислений в приближении параксиальной оптики оказывается менее 1%. Анализируя рис. 2.2, мы имеем

$$y_2 = RP = RQ + QP = y_1 + t \operatorname{tg} v_1 = y_1 + t v_1.$$

Переход к параксиальному приближению означает замену $\operatorname{tg} v$ или $\sin v$ и на v с пренебрежимо малой ошибкой. Ранее было отмечено, что матрица перемещения предназначена для операций с такими параметрами луча, как высота луча и оптический направляющий косинус (V), а не просто его угол v . Таким образом, если n – показатель преломления среды между ОП₁ и ОП₂, то приведенное выше уравнение нужно переписать в виде

$$y_2 = y_1 + t v_1 \frac{n}{n} = y_1 + \frac{t}{n} n v_1 = y_1 + T V_1,$$

где $T = t/n$ – приведенная толщина оптического промежутка. Из диаграмм (рис. 2.2) нетрудно заметить, что $v_1 = v_2$. Следовательно, для нового оптического направляющего косинуса V_2 можно написать уравнение

$$V_2 = n v_2 = n v_1 = 0 y_1 + 1 V_1.$$

Полученные два уравнения теперь можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, перемещение луча вправо описывается матрицей

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

в которую в качестве матричного элемента входит приведенное расстояние T . Определитель этой матрицы $\det \mathfrak{T} = 1$.

Составные слои и плоскопараллельные пластины. Следует отметить, что если произвольным образом разделить оптический

промежуток t на два примыкающих друг к другу промежутка t_1 и t_2 , имеющих одинаковые коэффициенты преломления n , то мы получим две последовательные матрицы

$$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & T_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $T_1 = t_1/n$, $T_2 = t_2/n$ и $t_1 + t_2 = t$.

Если затем перемножить \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 в произвольном порядке, то, как и должно быть, получим

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & T_1 + T_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{T},$$

поскольку $T_1 + T_2 = T$.

Аналогичная ситуация возникает и в тех случаях, когда оптический промежуток общей толщиной t состоит из нескольких различных слоев, каждый из которых характеризуется собственной толщиной t_i и собственным показателем преломления n_i . При условии, что все граничные поверхности являются плоскими и перпендикулярными оси z , высота луча и оптический направляющий косинус будут оставаться неизменными на каждой граничной поверхности. Отсюда следует, что можно не опасаться ошибок в написании матриц преломления, ибо любая из них есть просто единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, которую можно не учитывать¹ [4].

Таким образом, для получения общей матрицы, описывающей действие оптического промежутка в целом, при условии, что каждый i -й слой характеризуется собственной приведенной толщиной $T_i = t_i/n_i$, все отдельные матрицы перемещения нужно перемножить друг с другом. Как уже показано, эти матрицы перемещения обладают полезным свойством – их произведение не зависит от порядка их умножения. Величина T в результирующей матрице рав-

¹Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.

на сумме значений T_i исходных отдельных матриц-сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & T_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^m T_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, что означает с точки зрения оптики тот факт, что матрицы перемещения дают один и тот же результат, в каком бы порядке они не были взяты. Если смотреть через набор плоскопараллельных пластинок в направлении, перпендикулярном их плоскостям, то, сдвигая эти пластинки или даже меняя их местами, можно повлиять на количество отраженного света, но геометрия передаваемого ими изображения будет оставаться точно той же самой.

При утверждении, что плоскопараллельная стеклянная пластинка с показателем преломления n и толщиной t имеет приведенную толщину t/n , понимают определенное физическое явление. Если смотреть на любой предмет через пластинку, то свет идет к наблюдателю дольше, чем в ее отсутствие, но предмет, несомненно, кажется расположенным ближе. Замена слоя воздуха перед наблюдателем на слой стекла такой же толщины «зрительно» приближает к нему наблюдаемый мир на расстояние $(t/1) - (t/n) = t(n - 1)/n$, приблизительно равное одной трети толщины пластинки. Для погруженных в воду предметов коэффициент $(n - 1)/n \approx 0.25$, однако истинная глубина t может оказаться значительной – «даже медведю, хватяющему своей лапой рыбу из воды, необходимо знать об оптическом уменьшении толщины» [4].

Матрица преломления

Рассмотрим теперь вопрос о том, как действует на распространение лучей кривая поверхность, разделяющая две области с показателями преломления n_1 и n_2 . Радиус кривизны поверхности считается положительным, когда центр кривизны расположен справа от поверхности. На рис. 2.3 приведена поверхность поло-

жительной кривизны, причем $n_1 > n_2$. Луч, показанный на рис. 2.3, также имеет положительные значения величин y и V на обеих сторонах поверхности [4].

Как и на рис. 2.2, углы здесь даны в увеличенном масштабе. Поэтому проходящая через вершину преломляющей поверхности ОП₁ кажется расположенной на заметном расстоянии от ОП₂, проходящей через точку пересечения луча с этой поверхностью. Однако в случае параксиальных лучей расстояние между этими двумя плоскостями равно $r(1 - \cos \alpha)$ и, следовательно, пренебрежимо мало, поскольку, согласно предположению, α , так же как и v_1 , и v_2 , — малый угол. Отсюда мы имеем $y_1 = y_2$.

Применяя закон Снеллиуса к нашей диаграмме, мы можем написать

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

или в параксиальном приближении

$$n_1 i_1 = n_2 i_2.$$

Но по теореме о внешнем угле треугольника

$$i_1 = v_1 + \alpha = v_1 + \frac{y_1}{r} \quad \text{и} \quad i_2 = v_2 + \alpha = v_2 + \frac{y_1}{r}.$$

Следовательно,

$$n_1 \left(v_1 + \frac{y_1}{r} \right) = n_2 \left(v_2 + \frac{y_1}{r} \right),$$

или

$$V_1 + \frac{n_1 y_1}{r} = V_2 + \frac{n_2 y_1}{r}.$$

Таким образом, переписывая эти уравнения в матричной форме, окончательно получаем

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Величину $(n_2 - n_1)/r$ обычно называют оптической силой поверхности.

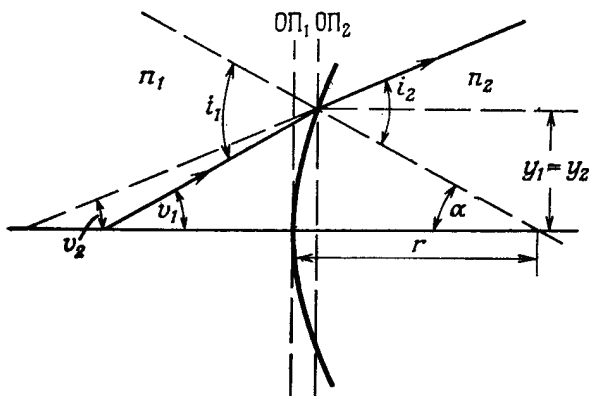


Рис. 2.3. К выводу матрицы преломления [4]

Мы получили матрицу преломления

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/r & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

для конкретного случая, когда все величины являются положительными. Однако тщательный анализ показывает, что матрица \mathfrak{R} правильно описывает преломление луча и в других случаях, т. е. если поменять местами граничащие среды или изменить знак кривизны поверхности, или при $y < 0$ или $V < 0$ [4].

Отметим, если луч проходит через плоскую преломляющую поверхность, для которой радиус кривизны $r \rightarrow \infty$, и, следовательно, ее оптическая сила $(n_2 - n_1)/r = 0$, получим тривиальный случай единичной матрицы преломления (см. выше).

Тонкая линза. Аналогичное свертывание матриц преломления возможно и в случае нескольких преломляющих поверхностей, когда они расположены близко одна от другой, так что оптические промежутки между ними пренебрежимо малы (матрица перемещения через такой промежуток вырождается в единичную матрицу). Если кривизна каждой i -й преломляющей поверхности равна

r_i , а показатели преломления прилегающих к ней сред n_i и n_{i+1} соответственно, то ее оптическую силу можно записать в виде $P_i = (n_{i+1} - n_i)/r_i$. Тогда общая матрица системы тонких линз $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sum_i P_i & 1 \end{pmatrix}$ не будет зависеть от того, в каком порядке складываются друг с другом оптические силы отдельных линз.

Читателю предлагается самостоятельно проверить равенство

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1 + P_2) & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_1.$$

Например, матрица преломления одиночной тонкой линзы одна и та же для всех путей луча. Ее оптическая сила дается выражением

$$P = P_1 + P_2 = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f},$$

где f – фокусное расстояние.

Оптическая сила обычно выражается в диоптриях ($1/\text{м}$), а фокусное расстояние f и радиусы кривизны r_1 и r_2 измеряются в метрах.

В общем случае, если нужно рассчитать систему, состоящую из ряда тонких линз с заданными фокусными расстояниями, удобно каждое фокусное расстояние f_i заменить на соответствующую ему оптическую силу $P_i = 1/f_i$. Тогда матрица преломления i -й линзы имеет вид

$$\mathfrak{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_i & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже показали, что наиболее просто свертывается в единую матрицу либо последовательность \mathfrak{T} -матриц, либо последовательность \mathfrak{R} -матриц. Однако в общем случае может быть произвольный порядок следования \mathfrak{R} и \mathfrak{T} -матриц; поэтому нужно тщательно следить за тем, в каком порядке они появляются. Умножение любой матрицы преломления на любую матрицу перемещения не

коммутативно. Например,

$$\mathfrak{R}\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ -P & (1-TP) \end{pmatrix},$$

тогда как

$$\mathfrak{T}\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-TP) & T \\ -P & 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что вторая матрица отличается от первой: матричные элементы на главной диагонали поменялись местами.

Матрица отражения

Пусть световой луч отражается в воздухе от сферического зеркала радиуса r . При этом отражение происходит на высоте y_1 и до отражения луч имеет угол наклона v_1 . Мы используем два подхода для вывода матрицы отражения. Первый из них геометрический, как для матриц перемещения и преломления, второй использует параксиальную или гауссову оптику.

Геометрический вывод. Очевидно, что непосредственно при отражении высота луча не изменится, т. е. $y_2 = y_1$, а вот угол наклона примет новое значение (см. рис. 2.4).

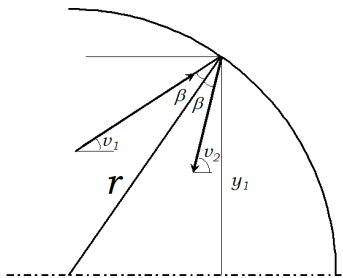


Рис. 2.4. К выводу матрицы отражения: при отражении высота светового луча не меняется, угол падения и угол отражения равны β

Так как зеркало сферическое, нормаль к нему совпадает с радиусом. Угол между световым лучом и радиусом – угол падения обозначим β , угол отражения тоже будет β . Поэтому угол наклона отраженного луча будет $v_1 + 2\beta$, а с учетом того, что после отражения луч будет двигаться в противоположном направлении, и мы должны будем изменить положительное направление оси x , на самом деле будет $v_2 = -v_1 - 2\beta$.

Прямоугольный треугольник на рис. 2.4 дает нам $\sin(v_1 + \beta) = y_1/r$ или, учитывая малость углов, просто $v_1 + \beta = y_1/r$, поэтому $v_2 = -v_1 - 2\beta = v_1 - 2y_1/r$.

Окончательно,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1, \\ v_2 &= -\frac{2}{r}y_1 + v_1. \end{aligned}$$

Записав эту систему уравнений в матричном виде, получаем

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Итак, отражение светового луча от зеркала радиуса r описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей отражения.

Добавим, что для луча, движущегося в обратном направлении, матрицы перемещения и отражения имеют тот же самый вид.

Вывод с использованием гауссовой оптики. Воспользуемся тем фактом, что в области параксиальной оптики луч, идущий параллельно оси зеркала, т. е. луч $\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ после отражения попадает в фокус сферического зеркала, расположенный на расстоянии $r/2$ от его вершины.

Конечно же, непосредственно после отражения высота луча тоже будет равна y , а, как показывает рис. 2.5, угол наклона луча

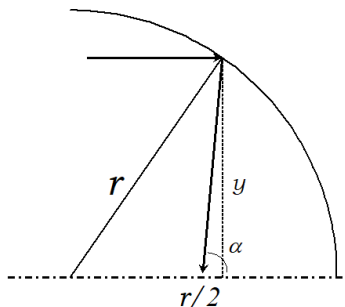


Рис. 2.5. Параксиальный луч, идущий параллельно оси зеркала, после отражения попадает в фокус, расположенный на расстоянии $r/2$ от вершины

будет $\alpha = -y/(r/2)$, т. е. отраженный луч характеризуется вектором $\begin{pmatrix} y \\ -\frac{2}{r}y \end{pmatrix}$. И это означает, что

$$\begin{pmatrix} y \\ -\frac{2}{r}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ Cy \end{pmatrix}.$$

Из равенства первых координат левого и правого векторов следует, что $A = 1$, а из равенства вторых координат $-C = -2/r$.

Теперь изменим направление только что рассмотренного луча на противоположное. Тогда луч до отражения будет задаваться вектором $\begin{pmatrix} y \\ \frac{2}{r}y \end{pmatrix}$, а после отражения $\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. И это означает, что

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \frac{2}{r}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay + B\frac{2}{r}y \\ Cy + D\frac{2}{r}y \end{pmatrix}.$$

Опять приравняем первые координаты, тогда из того, что $A = 1$, следует, что $B = 0$, а из равенства вторых координат следует $-C + D(2/r) = 0$. Вместе с $C = -2/r$ это дает, что $D = 1$. Итак, все элементы матрицы отражения найдены, и мы опять имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Матрица преобразования лучей для оптической системы

Нумерация опорных плоскостей. Рассмотрим распространение паракисального луча через оптическую систему, состоящую из n преломляющих поверхностей, разделенных $(n - 1)$ промежутками. Из конструктивных соображений удобно выбрать в качестве первой – *входной* – опорной плоскости плоскость ОП₁, расположенную на расстоянии d_a слева от первой преломляющей поверхности. Опорные плоскости ОП₂ и ОП₃ в таком случае помещают непосредственно слева и справа от первой преломляющей поверхности; ОП₄ и ОП₅ – с обеих сторон от второй преломляющей поверхности и т. д. до тех пор, пока не будет закончена работа с последними плоскостями ОП_{2n} и ОП_{2n+1}, расположенных по левую и правую стороны от n -й преломляющей поверхности. Конечную – *выходную* – опорную плоскость ОП_{2n+2} следует поместить на расстоянии d_b справа от этой последней преломляющей поверхности. Далее мы попытаемся получить общую матрицу преобразования лучей M , которая позволит нам непосредственно преобразовывать вектор входного луча $\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$ в вектор выходного луча $\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$ (см. рис. 2.6) [4].

Нумерация матриц. Следующий шаг состоит в том, чтобы выписать матрицы перемещения или преломления, соответствующие каждому из оптических элементов, расположенных между различными опорными плоскостями. Перемещаясь по схеме (рис. 2.6) слева направо, присвоим каждой матрице порядковый номер, т. е. запишем $M_1, M_2, \dots, M_{2n+1}$, причем присваиваемый каждой матрице оптического элемента номер должен совпадать с номером опорной плоскости, расположенной *слева* от элемента.

Таким образом, если обозначить вектор луча $\begin{pmatrix} y_r \\ V_r \end{pmatrix}$, проходящего через r -ю опорную плоскость, как K_r , то для преобразования параметров луча из ОП _{r} в ОП _{$r+1$} можно написать сле-

дующее рекуррентное соотношение: $K_{r+1} = M_r K_r$; аналогично $K_r = M_{r-1} K_{r-1}$ и т. д. [4].

Расчет параметров выходного луча по заданным параметрам входного луча. Используя повторно это рекуррентное соотношение, а также ассоциативное свойство умножения матриц, находим

$$\begin{aligned} K_{2n+2} &= M_{2n+1} K_{2n+1} = M_{2n+1} (M_{2n} K_{2n}) = \dots = \\ &= (M_{2n+1} M_{2n} M_{2n-1} M_{2n-2} \dots M_2 M_1) K_1. \end{aligned}$$

Следовательно, $K_{2n+2} = M K_1$, где M представляет собой произведение всех матриц, взятых в нисходящем порядке номеров:

$$M = M_{2n+1} M_{2n} M_{2n-1} M_{2n-2} \dots M_2 M_1.$$

Здесь важно отметить, что в этих уравнениях отдельные матрицы стоят в обратном порядке по сравнению с принятой для них нумерацией. Было бы полезно зрительно представлять себе такой порядок как порядок, который видит наблюдатель, если он смотрит назад от выходной опорной плоскости по направлению к источнику света. Кроме того, этот же порядок уместно сохранять при написании уравнения, если уж мы решили начать с вектора выходящего луча; тогда последующие матрицы можно рассматривать как звенья математической цепочки, которая приведет нас назад к входу системы [4].

Расчет входного луча по данному выходному лучу. Если мы хотим исходить из первых принципов, то для решения этой задачи мы должны обратить каждую из отдельных матриц, а затем воспользоваться обращенным рекуррентным соотношением $K_r = M_r^{-1} K_{r+1}$. При этом мы получим

$$K_1 = M_1^{-1} K_2 = M_1^{-1} M_2^{-1} K_3 = (M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{2n+2}^{-1}) K_{2n+2}.$$

Здесь звенья цепочки оказываются расположенными в возрастающем порядке номеров, но каждое из них представляет собой обратную матрицу.

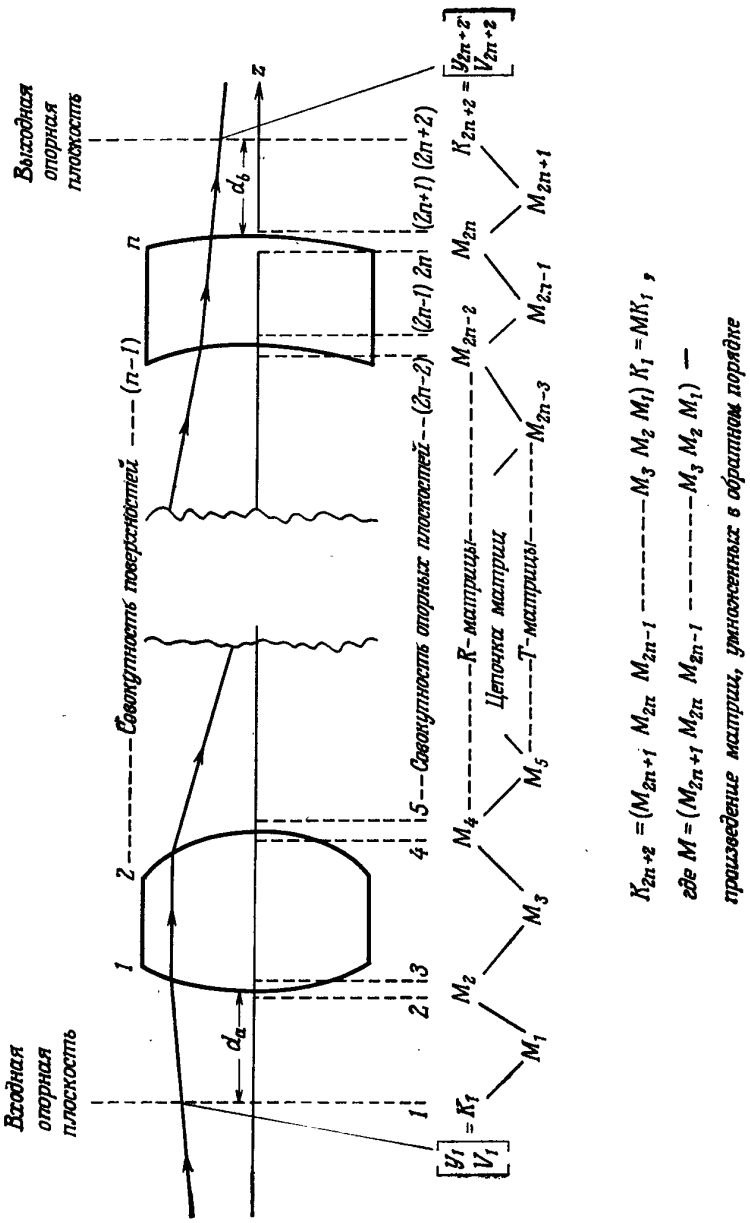


Рис. 2.6. Схематическое представление оптической системы для получения матрицы преобразования лучей [4]

Однако, как правило, мы будем иметь уже рассчитанную общую матрицу M и можем приступать прямо к обращению уравнения $K_{2n+2} = MK_1$ с тем, чтобы получить $K_1 = M^{-1}K_{2n+2}$. В итоге мы получим тот же результат, поскольку матрица, обратная по отношению к произведению матриц, равна произведению обратных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке [4].

Получение общей матрицы M . Свойство ассоциативности позволяет по-разному организовать вычисление общей матрицы, представляющей собой произведение отдельных матриц. Однако если мы имеем дело более чем с тремя матрицами, то для облегчения расчетов можно предварительно разбить все произведение на пары матриц. Матрицу для произведений типа $\mathfrak{R}\mathfrak{T}$ можно выписать почти сразу, поскольку в этом случае требуется вычислить только четвертый матричный элемент $(1 - PT)$. По мере того как продвигается вперед вычисление длинной цепи матриц, целесообразно время от времени проверять, равен ли единице определитель результирующей матрицы, полученной к данному моменту. Если он окажется не равным единице, это означает, что где-то в процессе вычислений была допущена ошибка, ибо все \mathfrak{R} и \mathfrak{T} матрицы сами по себе унимодулярные [4].

Как только будет найдена общая матрица M всей оптической системы, о всех промежуточных выкладках и элементах расчета можно забыть и перенумеровать входную опорную плоскость, а именно обозначить ее ОП₂².

Однако в некоторых случаях часть оптической системы может быть отделена от другой промежутком переменной длины. Вследствие этого лучше было бы рассчитать отдельно обе известные части системы, а затем получить общую матрицу всей системы, связав две вычисленные матрицы через матрицу $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующую оптическому промежутку с переменной толщиной t . Тогда четыре элемента общей матрицы будут просто линейными функциями от t .

²Теперь преобразование параметров луча через всю систему от входной ОП₁ до выходной ОП₂ можно выполнить за один прием.

Кроме того, на практике нередко сложный набор линз применяется в ситуациях с переменными расстояниями до объекта и до изображения. В этих случаях также приходится сначала вычислить отдельно матрицу для известной центральной части оптической системы.

§ 4. Матричное описание свойств оптической системы

Предположим, что мы нашли численные значения матричных элементов матрицы M сложной оптической системы и уравнение $K_2 = MK_1$ в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix},$$

где $AD - BC = 1$. Для того чтобы лучше уяснить себе смысл четырех величин A , B , C и D , рассмотрим, что произойдет, если одну из них принять равной нулю.

- а. Если $D = 0$, то уравнение для V_2 принимает вид $V_2 = Cy_1 + 0V_1 = Cy_1$. Это значит, что все лучи, выходящие из одной и той же точки y_1 входной опорной плоскости, выйдут из выходной опорной плоскости под одним и тем же углом $V_2 = Cy_1$ к оси системы независимо от того, под каким углом V_1 эти лучи входили в систему. Отсюда следует, что входная плоскость ОП₁ должна быть первой фокальной плоскостью системы (рис. 2.7).
- б. Если $B = 0$, то уравнение для y_2 записывается следующим образом: $y_2 = Ay_1 + 0V_1 = Ay_1$. Это значит, что все лучи, покидающие точку O (с координатой y_1) на плоскости ОП₁, пройдут через одну и ту же точку I (с координатой y_2) на плоскости ОП₂. Следовательно, точки O и I являются соответственно точкой-объектом и точкой-изображением, а плоскости ОП₁ и ОП₂ сопряженными плоскостями. Кроме того, в данных условиях величина $A = y_2/y_1$ будет являться увеличением системы (рис. 2.8).

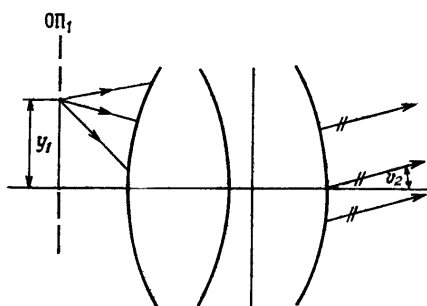


Рис. 2.7. Положение первой фокальной плоскости оптической системы [4]

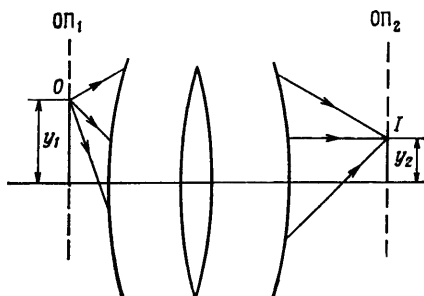


Рис. 2.8. Положение сопряженных плоскостей оптической системы [4]

- в. Пусть $C = 0$, тогда $V_2 = DV_1$. Это означает, что все лучи, которые входят в систему параллельно друг другу (например, под углом V_1 к оптической оси), на выходе оптической системы дадут также параллельный пучок лучей, но относительно оси его угол распространения изменится и станет равным V_2 . Такая система линз, которая преобразует параллельный пучок лучей в параллельный же, но распространяющийся под другим углом, называется *афокальной* или *телескопической* системой. В этом случае величина $n_1 D / n_2 = v_2 / v_1$

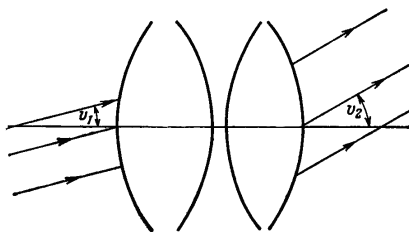


Рис. 2.9. Афокальная система линз [4]

представляет собой *угловое увеличение* оптической системы (рис. 2.9).

- г. В случае $A = 0$ уравнение для y_2 записывается в виде $y_2 = BV_1$. Это значит, что лучи, входящие в систему под одним и тем же углом V_1 , пройдут через одну и ту же точку (с координатой y_2) на выходной плоскости ОП₂. Таким образом, система собирает пучок параллельных лучей в фокус в точках, расположенных на плоскости ОП₂, т. е. ОП₂ является *второй фокальной плоскостью* оптической системы (рис. 2.10).

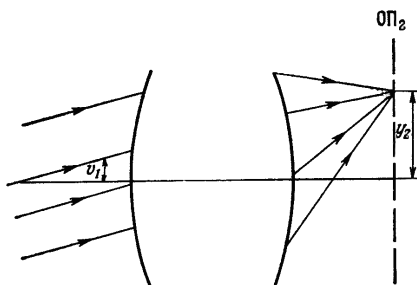


Рис. 2.10. Положение второй фокальной плоскости оптической системы [4]

д. Наконец, нужно помнить, что если какая-либо из величин A или D в матрице преобразования лучей обращается в нуль, то условие $AD - BC = 1$ требует, чтобы выполнялось равенство $BC = -1$. Аналогично, если в нуль обращается B или C , то A должно быть величиной, обратной D .

На том основании, что B обращается в нуль, когда в качестве опорных плоскостей выбраны оптически сопряженные плоскости, и что A или $1/D$ в этом случае дает поперечное увеличение, можно построить экспериментальный метод для нахождения матричных элементов оптической системы, причем не требуется ни расчленения ее на отдельные части, ни измерения параметров ее отдельных компонент.

Вообще говоря, если только величина V не равна нулю, луч обязательно пересекает оптическую ось в какой-либо точке. Координата z этой точки относительно данной точки, в которой луч имеет высоту y и угол $v = V/n$, равна $-y/v = -ny/V$. Точка пересечения расположена слева от опорной плоскости в случае, когда величины $y > 0$ и $V > 0$ либо обе отрицательны (рис. 2.11) [4].

§ 5. Задачи, иллюстрирующие матричный подход

Задача 1. Левый конец длинного цилиндрического стержня из органического стекла с показателем преломления 1.56 имеет форму выпуклой полированной сферической поверхности радиусом 2.8 см. Предмет в виде стрелки длиной 2 см расположен в воздухе на оси стержня на расстоянии 15 см от крайней точки этой поверхности. Определите положение и размер изображения внутри стержня.

Решение. При распространении луча от объекта до точки его изображения, т.е. от опорной плоскости ОП₁ до ОП₂, луч претерпевает три процесса: перемещение в воздухе, преломление на криволинейной поверхности и перемещение в стекле. Таким образом, для полной матрицы оптической системы необходимо записать две матрицы перемещения и одну матрицу преломления, используя формулы (2.1) и (2.2), соответственно.

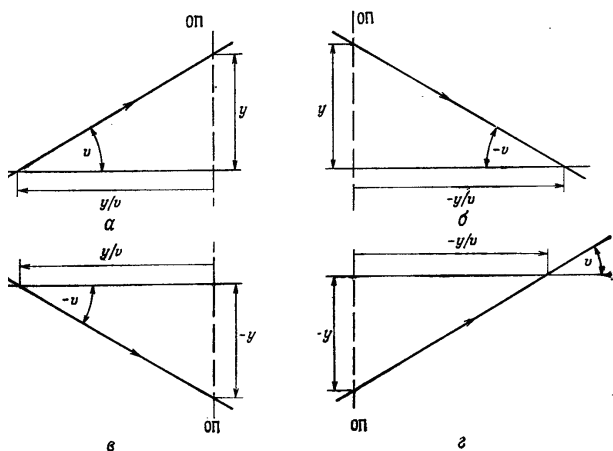


Рис. 2.11. Схема для определения координат луча, пересекающих оптическую ось, для различных случаев:
 $a - y > 0, V > 0$, $б - y > 0, V < 0$, $в - y < 0, V < 0$, $г - y < 0, V > 0$

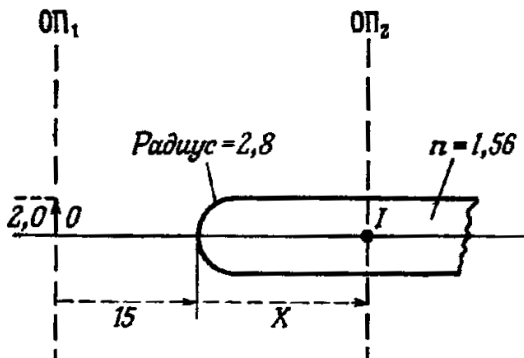


Рис. 2.12. Оптическая схема в задаче 1 [4]

Выберем в качестве единицы измерения длины см для записываемых матриц и будем записывать компоненты матриц, подставляя численные значения всех величин.

Если изображение находится на расстоянии X см справа от вершины преломляющей поверхности, то цепочка матриц в направлении от изображения назад к предмету имеет вид

$$\begin{aligned}
 M = & \begin{pmatrix} 1 & X/1,56 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-1,56+1)/2,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15/1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 & \text{От ОП}_2 \text{ до Преломление на гра- От грани-} \\
 & \text{границы нице воздух-стекло цы воздух-} \\
 & \text{воздух-стекло стекло до} \\
 & \text{ОП}_1 \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & X/1,56 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -0,2 & -2 \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 1 - X/7,8 & 15 - X/0,78 \\ -0,2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для контроля правильности вычислений найдем определитель матрицы M :

$$\det M = AD - BC = -2 + (X/3,9) + 3 - (X/3,9) = 1.$$

Чтобы выполнялось соотношение, связывающее предмет с его изображением, верхний правый элемент B должен быть равен нулю:

$$15 - \frac{X}{0,78} = 0, \text{ отсюда } X = 11,7.$$

Таким образом, изображение находится внутри стержня на расстоянии 11,7 см от вершины сферической поверхности. Поперечное увеличение дается либо величиной A , либо величиной $1/D$ и равно $-0,5$. Следовательно, изображение представляет собой перевернутую стрелку размером $(0,5 \cdot 2)$ см = 1 см.

Задача 2. Оба конца стеклянного цилиндрического стержня длиной 2,8 см имеют форму выпуклой сферической поверхности радиусом 2,4 см. Предмет в виде стрелки длиной 2 см помещен на оси стержня в воздухе на расстоянии 8 см от левого конца стержня. Найти положение и размер окончательного изображения, используя рис. 2.13.

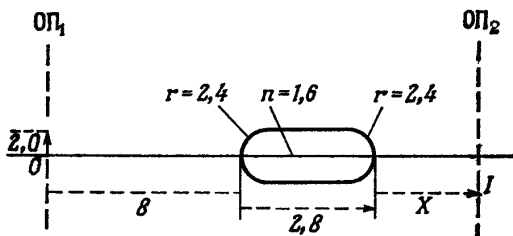


Рис. 2.13. Оптическая схема в задаче 2 [4]

Решение. Из рис. 2.13 видно, что для решения задачи нужно записать последовательность из трех матриц перемещения и двух матриц преломления. Если окончательное изображение расположено справа на расстоянии X см от правого конца стержня, то цепочка матриц в численной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1,75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

От ОП₂ до стержня Преломление в стержне Перемещение в стержне Преломление стержня до ОП₁

$$= \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5625 & 6,25 \\ -0,391 & -2,56 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5625 - 0,391X & 6,25 - 2,56X \\ -0,391 & -2,56 \end{pmatrix}.$$

Соотношение связи между предметом и его изображением определяется равенством $B = 0$, т.е. $2,56X = 6,25$ или $X = 2,44$ см (справа от стержня). Увеличение $1/D = -1/2,56 = -0,39$. Следовательно, изображение стрелки перевернуто и его размер равен $(2 * 0,39)$ см = $0,78$ см.

Задача 3. Параллельный пучок света проходит через прозрачный сферический шарик диаметром 2 см из органического

стекла, показатель преломления которого равен 1.4. Используя рис. 2.14, найти точку, расположенную за шариком, в которой свет соберется в фокус.

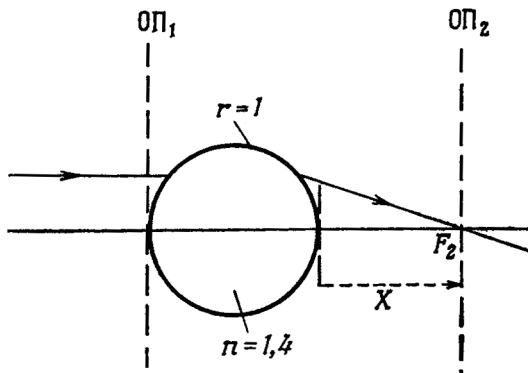


Рис. 2.14. Оптическая схема в задаче 3 [4]

Решение. Выберем выходную опорную плоскость $ОП_2$, расположив ее на расстоянии X см справа от шарика. Запишем последовательность матриц преломления и перемещения в числовом виде.

$$\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,40 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1,43 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,40 & 1 \end{pmatrix} =$$

От $ОП_2$ до шара Преломление в шаре Перемещение в шаре Преломление до шара

$$= \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,429 & 1,429 \\ -0,571 & 0,429 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,429 - 0,571X & 1,429 + 0,429X \\ -0,571 & 0,429 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Чтобы параллельный пучок света собрался в фокус в $ОП_2$, матричный элемент A должен быть равен нулю:

$$0,571X = 0,429, \quad X = 0,75.$$

Таким образом, луч пересекает оптическую ось в точке на расстоянии 0,75 см справа от шарика.

Задача 4. Освещаемый предмет размером 5 см расположен на расстоянии 3 м от экрана (рис. 2.15). Каково должно быть фокусное расстояние тонкой собирающей линзы и где ее следует разместить, чтобы даваемое этой линзой изображение предмета на экране имело размер 100 см?

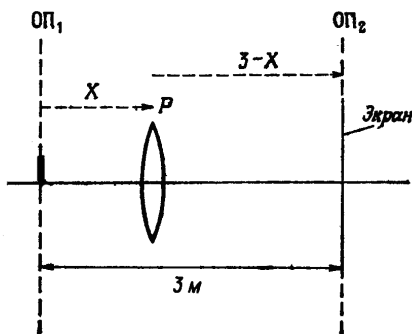


Рис. 2.15. Оптическая схема в задаче 4 [4]

Решение. Для вычисления матричных элементов будем считать, что линза находится на расстоянии X м от предмета и $(3 - X)$ м от экрана. Произведение матриц, соответствующее цепочке элементов от $ОП_2$ до $ОП_1$, записывается в виде

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} 1 & 3 - X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &\text{От } ОП_2 \text{ до линзы} \quad \text{Линза} \quad \text{От линзы до } ОП_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 - X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ -P & 1 - PX \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3P + PX & X + (3 - X)(1 - PX) \\ -P & 1 - PX \end{pmatrix}.$$

Одиночная линза всегда дает перевернутое действительное изображение действительного предмета; поэтому величину увеличения следует взять со знаком минус, т. е. $-100/5 = -20$. Следовательно, в приведенной выше матрице имеем $A = 1/D = -20$ и $B = 0$, т. е. выполняется соотношение связи между предметом и его изображением. Поскольку $D = 1 - = -0,05$, то из равенства $B = 0$ получаем уравнение для X

$$X - 0,05(3 - X) = 0.$$

Решая его относительно X , получаем $X = 0,15$ м.

Уравнение для D теперь принимает вид

$$1 - 0,15P = -0,05,$$

так что $P = 7 \text{ м}^{-1}$.

Таким образом, фокусное расстояние линзы составляет $1/7 = 0,14 \text{ м} = 14 \text{ см}$.

§ 6. Экспериментальное определение элементов матриц оптической системы

Рассмотрим положительную систему линз, помещенную в воздушное пространство. Прежде всего выберем две удобно расположенные опорные плоскости системы: одну, ОП₁, у входной поверхности оптической системы и другую, ОП₂, у выходной поверхности. Первую из них назовем входной опорной плоскостью, а вторую — выходной опорной плоскостью. Матричные элементы A , B , C и D должны удовлетворять уравнению

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Предмет известной величины будем помещать на различных расстояниях слева от ОП₁ и регистрировать величину и положение получающегося каждый раз действительного изображения.

В общем случае смещение в положительном направлении вдоль оси z от предмета к ОП₁ обозначим через R , а смещение в положительном направлении вдоль оси z от ОП₂ к действительному изображению – через S . Мы будем смещать предмет таким образом, чтобы величины R и S каждый раз оставались положительными.

Цепочка матриц преобразования лучей от плоскости изображения назад к плоскости предмета имеет вид

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AR+B \\ C & CR+D \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A+SC & AR+B+S(CR+D) \\ C & CR+D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Относительно этой матрицы нам известно, что ее определитель равен единице и что ее верхний правый элемент в силу соотношения связи между предметом и его изображением равен нулю.

Верхний левый элемент $A+SC$ общей матрицы представляет собой поперечное увеличение, а нижний правый элемент $CR+D$ равен величине, обратной поперечному увеличению, которую мы будем обозначать через α .

Величины, которые можно экспериментально измерить, – это расстояния R и S и отношение высоты предмета к высоте изображения, равное $\alpha = CR+D$. Отметим, что если изображение перевернуто, как это часто бывает на практике, то $\alpha < 0$.

Если значения α , измеренные при нескольких расстояниях R , представить в виде графика зависимости $\alpha(R)$, то получим прямую, пересекающую ось α при $\alpha = D$, тангенс угла которой равен C . Таким образом определяются величины C и D .

Приравнивая в матрице M верхний правый элемент нулю, получаем $AR+B = -S(CR+D) = -S\alpha = \beta$, где мы ввели новую величину β , численные значения которой нам известны. Если теперь построить график зависимости $\beta(R)$, то величина A будет

определять наклон соответствующей прямой, пересекающей ось β в точке $\beta = B$. После того как все четыре матричных элемента будут найдены, следует удостовериться в том, что определитель $AD - BC$ приблизительно равен единице.

Отрицательная система линз. Если система, параметры которой нужно измерить, является рассеивающей (отрицательной), то приходится использовать дополнительную линзу для того, чтобы образовать действительное изображение, размер и местоположение которого справа от ОП₁ заданы. Путем подбора подходящего диапазона отрицательных значений R можно получить действительное изображение справа от ОП₂ и измерить его величину. Однако эта методика весьма неудобна.

Иммерсионные системы. Экспериментальное определение параметров иммерсионных оптических систем, которые характеризуются тем, что в них слева от ОП₁ находится среда с показателем преломления n_1 , а справа от ОП₂ – среда с показателем преломления n_2 , является весьма сложной процедурой. Однако, что касается матричного описания системы, то все, что необходимо сделать, это заменить расстояния R и S там, где они встречаются, например в матрицах перемещения, их приведенными значениями R/n_1 и S/n_2 . Когда вычисляется новая, с учетом этой подстановки, матрица преобразования лучей от изображения к предмету, ее нижний правый элемент по-прежнему будет соответствовать измеряемому значению величины α .

§ 7. Нахождение кардинальных точек системы

Кардинальные точки оптической системы – точки на оси OO' (рис. 2.16) центрированной оптической системы, позволяющие строить изображение произвольной точки пространства объектов в параксиальной области.

В общем случае (за исключением телескопических систем) за кардинальные точки принимают 4 точки: передний F и задний F' фокусы, переднюю H и заднюю H' главные точки. Задний фокус является изображением бесконечно удаленной точки, распо-

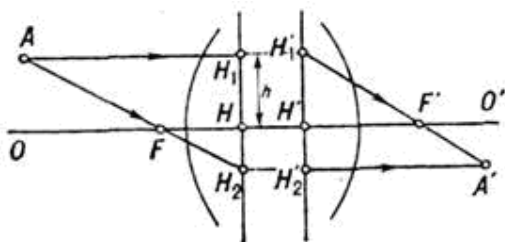


Рис. 2.16. Кардинальные точки оптической системы

ложенной на оптической оси в пространстве объектов, а передний фокус – изображением в пространстве объектов бесконечно удалённой точки пространства изображений. Главные точки являются точками пересечения с оптической осью главных плоскостей – сопряжённых плоскостей, для которых линейное увеличение равно 1, т. е. всякая точка H_1 расположенная в главной плоскости H_1H_2 на расстоянии h от оси, изображается в другой главной плоскости $H'_1H'_2$ в точке H'_1 на том же расстоянии h от оси, что и точка H_1 . Расстояние от точки H до точки F называется передним фокусным расстоянием (отрицательным на рис. 2.16), а расстояние от точки H' до точки F' – задним фокусным расстоянием (положительным на рис. 2.16). С помощью перечисленных четырёх точек F , H , F' и H' изображение произвольной точки A , создаваемое оптической системой, можно построить следующим образом: из точки A проводят 2 луча AN_1 и AFH_2 . Первый луч, идущий параллельно оптической оси и пересекающий заднюю главную плоскость на расстоянии $H'H'_1$ от оси ($H - H'_1 = HH_1$), проходит через задний фокус F' . Второй луч, проходящий через передний фокус F и переднюю главную плоскость H_1H_2 в точке H_2 , выходит из системы параллельно оси на расстоянии $H - H'_2$ от оси ($H - H'_2 = HH_2$). Точка пересечения A' этих двух лучей является изображением точки A , даваемым рассматриваемой оптической системой. Любой параксиальный луч, исходящий из точки A , по выходе из системы проходит через точку A' [6].

Число кардинальных точек в общем случае равно четырём. В некоторых частных случаях их число уменьшается; например, в бесконечно тонкой линзе или в системе из бесконечно тонких линз, разделённых бесконечно малыми воздушными промежутками, обе главные плоскости сливаются в одну. Оптические системы, содержащие одну отражающую поверхность, обладают только одной главной плоскостью и одним фокусом, т. к. лучи, падающие на систему, могут распространяться только в одном направлении (навстречу отражающей поверхности).

У телескопической системы кардинальных точек находятся на бесконечности, и поэтому построение изображения с их помощью невозможно. В этом случае можно разбить телескопическую систему на 2 части любым способом (например, на объектив и окуляр) и построить изображение любой точки пространства объектов в отдельности для каждой части.

В качестве кардинальных точек не обязательно пользоваться фокусами и главными точками, иногда последние заменяют узловыми точками, обладающими тем свойством, что луч, проходящий через переднюю узловую точку и образующий с осью угол α , после преломления проходит через заднюю узловую точку и образует с осью тот же угол α . Если значения показателей преломления первой и последней сред одинаковы, то узловые точки совпадают с главными [6].

Предположим, что для данной системы либо путем расчета, либо экспериментально с помощью описанного выше метода мы нашли матрицу $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, которая связывает параметры луча в выбранной выходной плоскости ОП₂ с его параметрами во входной плоскости ОП₁. Относительно этих опорных плоскостей будем искать местоположение двух фокальных точек, главных плоскостей единичного поперечного увеличения и сопряженных (или узловых) плоскостей единичного углового увеличения. Рассмотрим самый общий случай. Предположим, что n_1 и n_2 – соответственно показатели преломления сред, расположенных слева и справа от системы.

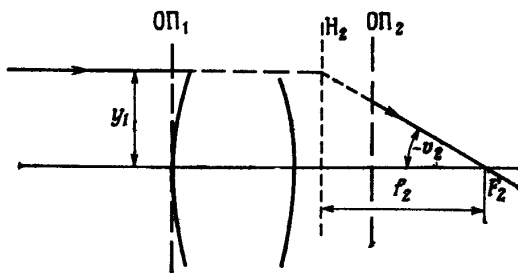


Рис. 2.17. К определению второго фокуса и второй главной плоскости оптической системы [4]

а. Рассмотрим сперва луч, входящий в оптическую систему параллельно оптической оси на высоте y_1 (рис. 2.17). В соответствии с принятыми в гауссовой оптике допущениями такой луч появится на той же самой высоте во второй главной плоскости H_2 , выходя из которой он резко меняет направление своего распространения таким образом, чтобы пройти через вторую фокальную точку F_2 . Для этого луча v_1 , а следовательно, и V_1 равны нулю. Тогда из матрицы преобразования лучей мы имеем в плоскости OP_2 $y_2 = Ay_1$ и $v_2 = V_2/n_2 = Cy_1/n_2$.

Пусть t_2 — смещение, измеряемое в положительном направлении оси z от OP_2 к F_2 , тогда должно выполняться следующее соотношение: $t_2 = -y_2/v_2 = -n_2A/C$, которое дает местоположение второго фокуса.

Рассматриваемый луч выходит из второй главной плоскости H_2 в точке с вертикальной координатой y_1 . Следовательно, если определить второе фокусное расстояние f_2 как смещение от H_2 до F_2 , то оно должно быть равно $f_2 = -y_1/v_2$. Поэтому $f_2 = -n_2y_1/Cy_1 = -n_2/C$, и тем самым определяется второе фокусное расстояние.

Следовательно, смещение от OP_2 до второй главной плоскости равно $s_2 = t_2 - f_2 = n_2(1 - A)/C$.

б. Рассмотрим теперь луч, который входит в оптическую систему под углом v_1 , проходя через первый фокус F_1 (рис. 2.18).

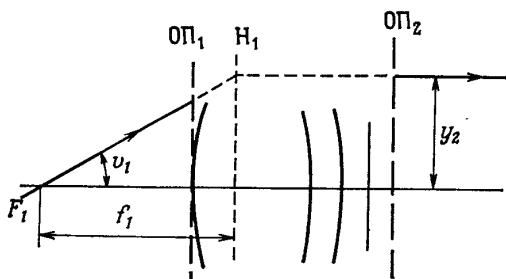


Рис. 2.18. К определению первого фокуса и первой главной плоскости оптической системы [4]

Направление распространения этого луча резко изменяется при пересечении им первой главной плоскости H_1 ; он становится параллельным оптической оси системы и, следовательно, пересекает $ОП_2$ под углом $v_2 = 0$, тогда и $V_2 = 0$.

Следовательно, можно написать $V_2 = Cy_1 + Dn_1v_1 = 0$ и $y_1 = -Dn_1v_1/C$. Из рис. 2.18 видно, что смещение t_1 фокуса F_1 от $ОП_1$ дается выражением $t_1 = -y_1/v_1 = n_1D/C$. Таким образом определяется положение первого фокуса.

Мы уже упоминали, что в первой главной плоскости y -координата этого луча должна быть равна $y_2 = Ay_1 + Bn_1v_1$. Поэтому, определив первое фокусное расстояние f_1 как смещение F_1 от H_1 , мы должны иметь

$$f_1 = y_2/v_1 = -DAn_1/C + Bn_1 = -n_1(AD - BC)/C = -n_1/C$$

для первого фокусного расстояния ($AD - BC = 1$).

Следовательно, величина $s_1 = t_1 + f_1 = n_1(D - 1)/C$ представляет собой смещение первой главной плоскости H_1 относительно $ОП_1$.

в. В заключение нам нужно определить две узловые точки системы L_1 и L_2 . Эти точки характеризуются следующим свойством: любой луч, входящий в систему под углом v_1 и проходящий через точку L_1 , появится на выходе системы как луч, выходящий



Рис. 2.19. К определению узловых точек оптической системы

из точки L_2 , причем выходящий луч будет составлять с осью системы угол $v_2 = v_1$ (рис. 2.19). Обозначим через p_1 и p_2 соответственно смещения точки L_1 от ОП₁ и точки L_2 от ОП₂. Цепочка матриц, связывающая в обратном направлении вторую узловую точку L_2 с первой узловой точкой L_1 , записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & p_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -p_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Промежуток от L_2 до ОП₂ Промежуток от ОП₂ до ОП₁ Промежуток от ОП₁ до L_1

$$= \begin{pmatrix} 1 & p_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -(Ap_1/n_1) + B \\ C & -(Cp_1/n_1) + D \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A + (p_2C/n_2) & -(Ap_1/n_1) + B + p_2(-Cp_1/n_1 + D)/n_2 \\ 0 & -Cp_1/n_1 + D \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при записи этого выражения мы использовали приведенные смещения и что в матрице \mathfrak{T} для оптического промежутка от ОП₁ до узловой точки L_1 стоит $-p_1$, а не p_1 .

Обозначим только что полученную матрицу через ϕ и пусть y_0 и v_0 являются параметрами луча на входе в плоскости узловой точки L_1 , а y_3 и v_3 – параметрами этого же луча на выходе из

плоскости узловой точки L_2 . Тогда можно написать следующие уравнения:

$$y_3 = \phi_{11}y_0 + \phi_{12}V_0 = \phi_{11}y_0 + \phi_{12}(n_1v_0)$$

и

$$n_2v_1 = V_3 = \phi_{21}y_0 + \phi_{22}V_0 = \phi_{21}y_0 + \phi_{22}(n_1v_0).$$

Однако если L_1 и L_2 – узловые точки и $y_0 = 0$, то независимо от величины v_0 мы должны иметь $y_3 = 0$ и $v_3 = v_0$. А эти равенства выполняются, только если $\phi_{12} = 0$ и $\phi_{22}(n_1/n_2) = 1$, иными словами, если матрица ϕ представляет собой матрицу преобразования луча от предмета до изображения с поперечным (линейным) увеличением $1/\phi_{22} = (n_1/n_2)$.

Из уравнения $\phi_{22} = n_2/n_1$ вытекает равенство $p_1 = (Dn_1 - n_2)/C$. Подставляя его в условие $\phi_{12} = 0$, в конечном счете получаем $p_2 = (n_1 - An_2)/C$.

Для удобства вычислений все эти результаты сведены в таблицу. Из правой колонки таблицы видно, что узловые точки совпадают с главными точками системы в том случае, когда система находится в воздухе (случай, наиболее часто встречающийся на практике). Такое совпадение узловых и главных точек обусловлено тем, что для погруженной в воздух оптической системы условия для единичного углового увеличения и единичного линейного увеличения одинаковы. Кроме того, оба фокусных расстояния равны одной и той же величине $-1/C$. В тех случаях, когда показатель преломления среды отличается от единицы, мы имеем дело с приведенным фокусным расстоянием, которое также равно $-1/C$.

Чтобы сделать наш элементарный анализ параксиальных преломляющих систем полным, выясним, как будет выглядеть матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, если преобразование луча рассматривать не между ОП₁ и ОП₂, а между двумя главными плоскостями (случай а) или двумя фокальными плоскостями системы (случай б).

Кардинальные элементы оптической системы

Элемент	Положение элемента		Связь с элементами матрицы оптической системы	Частный случай $n_1 = 1, n_2 = 1$
	от	до		
Первый фокус	ОП ₁	F ₁	$n_1 D/C$	D/C
Первое фокусное расстояние	F ₁	H ₁	$-n_1/C$	$-1/C$
Первая главная точка	ОП ₁	H ₁	$n_1(D-1)/C$	$(D-1)/C$
Первая узловая точка	ОП ₁	L ₁	$(Dn_1 - n_2)/C$	$(D-1)/C$
Второй фокус	ОП ₂	F ₂	$-n_2 A/C$	$-A/C$
Второе фокусное расстояние	H ₂	F ₂	$-n_2/C$	$-1/C$
Вторая главная точка	ОП ₂	H ₂	$n_2(1-A)/C$	$(1-A)/C$
Вторая узловая точка	ОП ₂	L ₂	$(n_1 - An_2)/C$	$(1-A)/C$

а. Для промежутка между двумя главными плоскостями матрица преобразования луча записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-D}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Промежуток от H₂ до ОП₂ Промежуток от ОП₂ до ОП₁ Промежуток от ОП₁ до H₁
 (смена знака!)

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{A(1-D)}{C} + B \\ C & \frac{C(1-D)}{C} + D \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{1-A}{C} \\ C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы учли, что $AD - BC = 1$. Таким образом, для промежутка между двумя главными плоскостями матрица преломления совпадает с матрицей преломления тонкой линзы, оптическая сила которой $P = -C = 1/f$. Как и следовало ожидать, существует соотношение связи между предметом в плоскости ОП₁ и его изображением в плоскости ОП₂ с единичным коэффициентом поперечного увеличения.

б. Для промежутка между двумя фокальными плоскостями матрица преобразования луча записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{D}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Промежуток от F_2 до ОП₂ Промежуток от ОП₂ до ОП₁ Промежуток от ОП₁ до F_1
(смена знака!)

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -\frac{AD}{C} + B \\ C & -\frac{CD}{C} + D \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица описывает хорошо известный результат: высота луча во второй фокальной плоскости зависит только от угла луча в первой фокальной плоскости, в то время как угол луча во второй фокальной плоскости зависит только от высоты луча в первой. Кроме того, если расстояние z_1 от предмета до первой фокальной плоскости, измеряемое влево от фокуса F_1 , записать в виде y_1/V_1 , а расстояние z_2 от изображения до второй фокальной плоскости – в виде y_2/V_2 , то сразу можно получить, что

$$z_1 z_2 = \frac{y_1}{V_1} \frac{y_2}{V_2} = -f_2 \text{ (уравнение Ньютона).}$$

Кроме того, как и следовало ожидать, равенство нулю диагональных элементов матрицы отражает тот факт, что ОП₁ и ОП₂ совпадают с фокальными плоскостями системы. Если эквивалентные фокусные расстояния не изменяются при таком преобразовании матрицы, то матричный элемент C остается тем же самым. Для того, чтобы матрица оставалась унимодулярной, ее правый верхний элемент должен быть равен $-1/C$ [4].

Глава 3

Использование матриц для описания состояний поляризации световых волн

§ 1. Поляризация

Из курса общей физики (раздел «Оптика») нам известно, что при распространении плоской монохроматической волны в изотропной однородной среде вектор напряженности \mathbf{E} электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения. Во многих случаях характер распространения световых волн существенно зависит от направления колебаний вектора напряженности электрического поля, т.е. от поляризации световой волны.

Световые волны представляют собой электромагнитное поле, для полного описания которого требуются четыре основных векторных поля: \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} . Для определения состояния поляризации световых волн используется вектор \mathbf{E} . Такой выбор связан с тем, что в большинстве оптических сред физические взаимодействия с волной осуществляются через электрическое поле. Например, во многих веществах¹ показатель преломления зависит от направления колебаний вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} . Это явление можно объяснить движением электронов, которые раскачиваются электрическим полем световых волн [7].

Для иллюстрации этого предположим, что анизотропное вещество состоит из несферических иглообразных молекул, причем все молекулы ориентированы таким образом, что их большие оси параллельны друг другу. Пусть в таком веществе распространяется электромагнитная волна. Вследствие анизотропной структуры молекул электрическое поле, параллельное осям молекул, будет сильнее смещать электроны вещества относительно их равнове-

¹Имеются в виду анизотропные среды.

ного положения, чем электрическое поле, перпендикулярное осям молекул. Поэтому в первом случае следует ожидать более сильной вынужденной поляризации электронов, чем во втором [7].

С поляризацией световых волн связано много других физических явлений. Прежде чем перейти к изучению этих оптических явлений, необходимо выяснить свойства поляризованных волн. Начнем рассмотрение с обзора состояний поляризации монохроматических плоских волн.

§ 2. Поляризация монохроматических световых волн

Поляризация световых волн определяется вектором электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в фиксированной точке пространства \mathbf{r} в момент времени t . Поскольку вектор напряженности электрического поля монохроматической волны \mathbf{E} изменяется во времени по синусоидальному закону, колебания электрического поля должны происходить с определенной частотой. Если предположить, что свет распространяется в направлении оси z , то вектор электрического поля будет располагаться в плоскости xy . Поскольку x - и y -составляющая вектора напряженности поля могут колебаться независимо с определенной частотой, сначала следует рассмотреть эффекты, связанные с векторным сложением этих двух осциллирующих ортогональных составляющих [7].

Задача о сложении двух независимых ортогональных колебаний с некоторой частотой хорошо известна и полностью аналогична задаче о классическом движении двумерного гармонического осциллятора. В общем случае такой осциллятор движется по эллипсу, который отвечает несфазированным колебаниям x - и y -составляющих. Существует, конечно, много частных случаев, имеющих большое значение в оптике. Начнем с рассмотрения общих свойств излучения с эллиптической поляризацией, а затем обсудим ряд частных случаев [7].

В представлении комплексных функций вектор напряженности электрического поля монохроматической плоской волны, рас-

пространяющейся в направлении оси z , дается выражением:

$$\mathbf{E}(z, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{A} e^{i(\omega t - kz)} \right], \quad (3.1)$$

где \mathbf{A} – комплексный вектор в плоскости xy , t – текущее время, ω – круговая частота, k – волновой вектор. Выясним теперь, что представляет собой кривая, которую описывает в некоторой точке пространства конец вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} . Эта кривая дает эволюцию во времени положения точки с координатами (E_x, E_y) :

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x), \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где комплексный вектор \mathbf{A} определен следующим образом:

$$\mathbf{A} = A_x e^{i\delta_x} \mathbf{e}_x + A_y e^{i\delta_y} \mathbf{e}_y,$$

здесь A_x и A_y – положительные числа, δ_y и δ_x – фазы колебаний компонент напряженности электрического поля E_y и E_x , \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – единичные векторы в направлении координатных осей x и y . Кривую, описываемую концом вектора напряженности электрического поля во времени, можно получить, если из уравнения (3.2) исключить $(\omega t - kz)$, спроектировав вектор напряженности на плоскость xy . После простых алгебраических преобразований получаем

$$\left(\frac{E_x}{A_x} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y} \right)^2 - 2 \cos \delta \frac{E_x}{A_x} \frac{E_y}{A_y} = \sin^2 \delta, \quad (3.3)$$

где $\delta = \delta_y - \delta_x$ [7].

Любой фазовый угол здесь удовлетворяет условию $-\pi < \delta < \pi$. Уравнение (3.3) описывает кривую второго порядка, которая ограничена прямоугольной областью со сторонами, параллельными координатным осям и имеющими размеры $2A_x$ и $2A_y$ (рис. 3.1). Следовательно, такая кривая должна быть эллипсом. В этом случае говорят, что волна, определяемая выражением

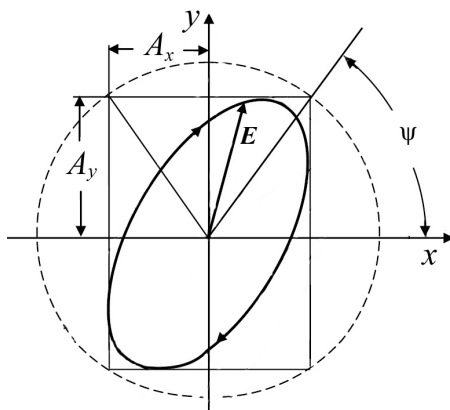


Рис. 3.1. Эллипс поляризации

(3.1), является эллиптически поляризованной [7]. При учете переменной t эта кривая лежит на боковой поверхности эллиптического цилиндра, а конец вектора \mathbf{E} движется по спирали.

Для полного описания эллиптической поляризации требуется знать направление вращения вектора \mathbf{E} , ориентацию эллипса относительно осей координат, т.е. угол ψ ($\operatorname{tg} \psi = A_y/A_x$) и его форму.

В общем случае направление главных осей эллипса не совпадает с направлениями осей x и y . Соответствующее преобразование системы координат (вращение) позволяет диагонализировать уравнение (3.3). Рассмотрим новую систему координат с осями x' и y' , направленными вдоль главных осей эллипса (рис. 3.2). В этой новой системе координат уравнение эллипса принимает вид

$$\left(\frac{E_{x'}}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_{y'}}{b}\right)^2 = 1,$$

где a и b – главные оси эллипса, а $E_{x'}$ и $E_{y'}$ – составляющие вектора электрического поля в новой системе координат.

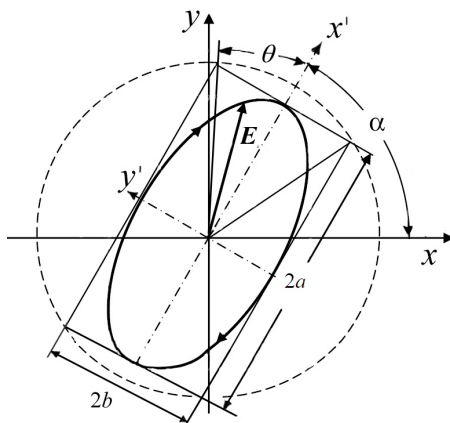


Рис. 3.2. Параметры эллипса поляризации

Заметим, что $a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2$, так как полная энергия эллиптически поляризованной волны не зависит от системы координат, в которой записан эллипс поляризации (рис. 3.3).

В ряде случаев при оптических измерениях предпочтительнее пользоваться следующими параметрами эллипса поляризации: азимут большой оси α (угол между направлением главной оси эллипса x' и осью x) и эллиптичность (форма эллипса) $b/a = \operatorname{tg} \theta$, где θ – угол эллиптичности (рис. 3.2).

Связь параметров эллипса ψ , δ , α и θ выражается тригонометрическими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} \cos 2\psi &= \cos 2\alpha \cos 2\theta, \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} 2\theta \sin 2\alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \operatorname{tg} 2\psi \cos \delta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Направление вращения эллиптической поляризации определяется знаком $\sin \delta$. При $\sin \delta > 0$ конец вектора напряженности электрического поля будет вращаться по часовой стрелке, а при $\sin \delta < 0$ – против часовой стрелки [7].

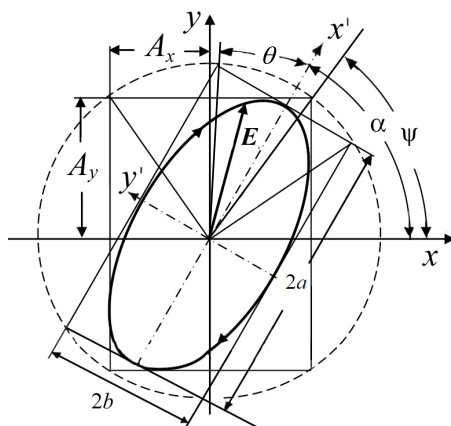


Рис. 3.3. Эллипс поляризации и его параметры (рис. 3.1 и рис. 3.2 объединены)

На рис. 3.4 показан характер изменения эллипса поляризации в зависимости от разности фаз δ .

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых частных случаев поляризации, дадим ряд определений.

Свет называется линейно-поляризованным, если конец вектора электрического поля \mathbf{E} перемещается вдоль прямой линии.

В случае, когда конец этого вектора описывает эллипс, свет называется эллиптически поляризованным, а в случае, когда он описывает окружность, – циркулярно поляризованным.

Если конец электрического вектора перемещается против часовой стрелки для наблюдателя, расположенного перед волной, то поле обладает правой поляризацией. На рис. 3.4 показано также направление вращения эллипса поляризации. Наше определение правой и левой поляризации согласуется с терминологией современной физики, в которой фотон с правой круговой поляризацией имеет положительный момент импульса в направлении распространения. Однако в некоторых книгах по оптике используется противоположное соглашение.

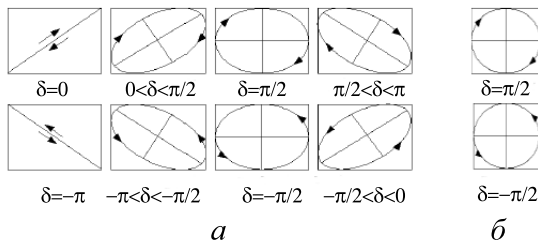


Рис. 3.4. Эллипсы поляризации в зависимости от разности фаз:
 а – для произвольных углов ψ ; б – для $\psi = \pi/4$

§ 3. Линейная и круговая поляризации

Особенно большое значение имеют два частных случая, когда эллипс поляризации вырождается либо в прямую линию, либо в окружность. В соответствии с выражениями (3.3) эллипс вырождается в прямую линию, когда

$$\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi \quad (m = 0, \pm 1).$$

Напомним, что все фазы по определению изменяются в интервале $-\pi < \delta < \pi$. В этом случае отношение составляющих вектора электрического поля остается постоянным:

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x},$$

и свет является линейно-поляризованным.

Другой важный частный случай отвечает циркулярно-поляризованной волне или волне с круговой поляризацией. В соответствии с (3.3) эллипс вырождается в окружность, когда

$$\delta = \delta_y - \delta_x = \pm \frac{1}{2}\pi \quad \text{и} \quad A_y = A_x.$$

Согласно нашему определению свет является правоциркулярно-поляризованным – при $\delta = -\pi/2$, что соответствует вращению

вектора напряженности электрического поля против часовой стрелки для наблюдателя перед волной, и левоциркулярно-поляризованным при $\delta = \pi/2$, что отвечает вращению вектора напряженности электрического поля по часовой стрелке. Эллиптичность эллипса поляризации характеризуется параметром

$$e = \pm \frac{b}{a},$$

где a и b – длины главных осей. Эллиптичность считается положительной, если вращение вектора электрического поля является правосторонним, и отрицательной в противоположном случае.

Линейная, круговая и эллиптическая поляризации представляют собой три основных состояния полностью поляризованной волны. Более того, эллиптическая поляризация является общим случаем, предельными случаями которой являются линейная и круговая поляризационные состояния. Если эллиптичность равна нулю, то имеет место линейная поляризация, в этом случае смысл направления вращения поляризации не определен. Эллиптичность, равная единице, означает круговую поляризацию, ориентация при этом не определена.

§ 4. Представление комплексного параметра

В предыдущем параграфе было показано, как состояние поляризации световой волны можно описать с помощью амплитуд и фазовых углов для x - и y -составляющих вектора напряженности электрического поля. Оказывается, что вся информация о поляризации волны содержится в комплексной амплитуде \mathbf{A} плоской волны (3.1). Следовательно, для описания состояния поляризации достаточно использовать комплексный параметр χ , определяемый выражением:

$$\chi = e^{i\delta} \operatorname{tg} \psi = \frac{A_y}{A_x} e^{i(\delta_y - \delta_x)},$$

где угол ψ по определению заключен в интервале от 0 до $\pi/2$. Параметры δ и ψ позволяют получить полное описание эллипса

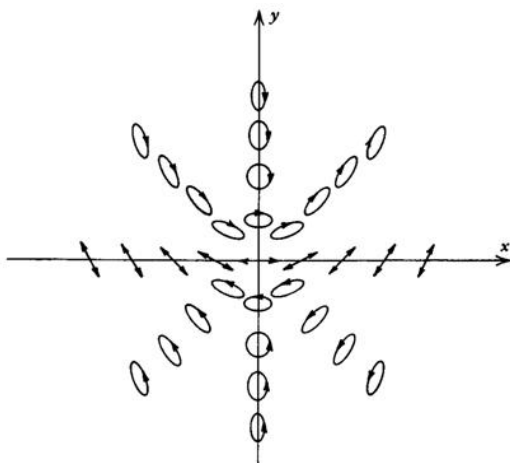


Рис. 3.5. Представление состояний поляризации на комплексной плоскости [7]

поляризации, для чего требуется задать его ориентацию, направление вращения и эллиптичность e . На рис. 3.5 изображены различные состояния поляризации в комплексной плоскости. Можно видеть, что все правые эллиптические состояния поляризации расположены в нижней полуплоскости, а состояниям с левой эллиптической поляризацией отвечает верхняя полуплоскость. Начало координат отвечает состоянию с линейной поляризацией, параллельной оси x .

Таким образом, любая точка комплексной плоскости соответствует одному состоянию поляризации. Каждая точка на оси x отвечает состояниям с линейной поляризацией, но с различными азимутальными углами колебаний. Круговой поляризации отвечают только две точки с координатами $(0, +1)$ и $(0, -1)$. Все остальные точки комплексной плоскости соответствуют состояниям с определенной эллиптической поляризацией.

Угол наклона ψ и угол эллиптичности θ ($\theta = \arctg e$), отвечающие данному эллипсу поляризации, связаны с комплексным

параметром χ следующим образом:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\operatorname{Re}[\chi]}{1 - |\chi|^2}$$

и

$$\sin 2\theta = -\frac{2\operatorname{Im}[\chi]}{1 + |\chi|^2}.$$

§ 5. Вектор Джонса

Поляризацию плоской волны можно достаточно хорошо представить с помощью вектора Джонса, введенного в 1941 г. Р. Джонсом [9]. В этом представлении плоская волна (3.1) описывается вектор-столбцом, составленным из ее комплексных амплитуд:

$$J = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что вектор Джонса является комплексным, т. е. его элементы задаются комплексными числами. Кроме того, J не является вектором в реальном физическом пространстве. Он представляет собой вектор в абстрактном математическом пространстве. Например, для получения вещественной величины x -составляющей напряженности электрического поля необходимо выполнить операцию $\operatorname{Re}[J_x e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[A_x e^{i(\omega t + \delta_x)}]$. А для определения параметров эллипса поляризации применяется процедура, приведенная ниже. Вычисляют углы ψ и δ :

$$\psi = |\operatorname{arctg}(A_y/A_x)|; \quad \delta = \delta_y - \delta_x.$$

Затем находят азимут α главной оси эллипса из формулы (3.5)

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\psi \cos \delta)$$

и эллиптичность $b/a = \operatorname{tg} \theta$

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin}(\sin 2\psi \sin \delta).$$

Вектор Джонса содержит полную информацию об амплитудах и фазах составляющих вектора электрического поля. Если нас интересует только состояние поляризации волны, то удобно пользоваться нормированным вектором Джонса, который удовлетворяет условию

$$J^* \cdot J = 1,$$

где звездочка (*) означает комплексное сопряжение. Таким образом, линейно-поляризованная световая волна с данным направлением вектора электрического поля может быть представлена вектором Джонса

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где ψ – азимутальный угол между направлением поляризации и осью x . Состояние поляризации, которое ортогонально состоянию поляризации, описываемому вектором (3.5), можно получить заменой ψ на $\psi + \pi/2$, что приводит к вектору Джонса:

$$\begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Частный случай $\psi = 0$ соответствует линейно-поляризованным волнам, вектор электрического поля которых колеблется вдоль осей координат. Векторы Джонса при этом имеют вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Световые волны с правой и левой круговой поляризацией описываются векторами Джонса

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Эти две круговые поляризации являются взаимно ортогональными в том смысле, что

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0.$$

Поскольку вектор Джонса представляет собой столбец из двух элементов, то любую пару ортогональных векторов Джонса можно выбрать в качестве базиса в пространстве всех векторов Джонса. Любая поляризация при этом может быть представлена как суперпозиция двух взаимно ортогональных поляризаций \hat{x} и \hat{y} или \hat{R} и \hat{L} . В частности, базисные линейные поляризации \hat{x} и \hat{y} можно разложить на две круговые поляризации \hat{R} и \hat{L} и наоборот. Эти разложения имеют вид

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{y}), \quad \hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{y}),$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{R} + \hat{L}), \quad \hat{y} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{R} - \hat{L}).$$

Видно, что круговая поляризация представляет собой суперпозицию двух линейных поляризаций вдоль осей и с равными амплитудами $1/\sqrt{2}$, но с разностью фаз $\pi/2$. Аналогично, линейную поляризацию можно рассматривать как суперпозицию двух противоположно направленных круговых поляризаций.

До сих пор мы рассматривали векторы Джонса для некоторых простых частных случаев поляризации. Нетрудно показать, что в общем случае эллиптическую поляризацию можно представить следующим вектором Джонса [7]:

$$\mathbf{J}(\psi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ e^{i\delta} \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Этот вектор Джонса отвечает некоторому состоянию поляризации, описываемому комплексным параметром $\chi = e^{i\delta} \operatorname{tg} \psi$. В таблице приведены векторы Джонса для некоторых типичных состояний поляризации.

Наиболее важное применение векторы Джонса находят при вычислениях состояния поляризации. Это мощный метод, используемый при исследовании распространения плоских волн с произвольным состоянием поляризации через произвольную последовательность двулучепреломляющих элементов и поляризаторов.

Вектора Джонса для характерных поляризаций	
Поляризация	Вектор Джонса
Линейная поляризация в x -направлении	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Линейная поляризация в y -направлении	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Линейная поляризация под углом в 45° по отношению к оси x	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Правая круговая поляризация	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
Левая круговая поляризация	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

§ 6. Смысл вектора Джонса

Как уже было сказано, поляризация – это общее свойство всех пространственных волн. Зависимость от времени положения одного из волновых векторов в пространстве может быть описана движением точки в пространстве. Чаще всего в качестве вектора поляризации рассматривается вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} монохроматической электромагнитной плоской волны. Предположим, что однородная плоская волна движется в положительном направлении вдоль оси z ортогональной правосторонней декартовой системы координат. Тогда вектор поляризации может быть записан в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = \left[\tilde{E}_x \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_x \right) \right] \mathbf{e}_x + \\ + \left[\tilde{E}_y \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_y \right) \right] \mathbf{e}_y,$$

где \tilde{E}_x и \tilde{E}_y представляют собой амплитуды линейных гармонических колебаний компонент электрического поля вдоль осей x и y ; δ_x и δ_y – соответствующие задержки (задержки, сдвиги по фазе).

Более краткое математическое описание может быть получено при исключении зависимости от времени. Вектор-столбец размерности 2 позволяет сгруппировать скалярные компоненты последнего уравнения

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{E}_x \exp\{-i\frac{2\pi}{\lambda}z\} \exp\{i\delta_x\} \\ \hat{E}_y \exp\{-i\frac{2\pi}{\lambda}z\} \exp\{i\delta_y\} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{E}_x = \text{Re}[\hat{E}_x], \quad \tilde{E}_y = \text{Re}[\hat{E}_y].$$

Рассматривая поле на плоскости $z = 0$, мы можем избавиться от пространственной информации. Оставшийся вектор и есть так называемый вектор Джонса. Он содержит полную информацию об амплитуде и фазе волновых компонент. Координаты вектора Джонса зависят от введенной системы декартовых координат и от плоскости наблюдения. Важно отметить, что вектор Джонса описывает плоскую волну, но не представляет ее. Как результат отказа от учета временной зависимости вектор \mathbf{E} , введенный формулой (3.7), позволяет описывать свойства лишь полностью поляризованных волн. Феномен частично или полностью деполаризованных волн может быть объяснен только при возврате временной информации комплексных амплитуд \hat{E}_x и \hat{E}_y , что ведет к концепции матриц Мюллера—Джонса.

Глава 4

Оптическая матрица Джонса. Формализм матриц Джонса для расчета двулучепреломляющих систем

Многие сложные двулучепреломляющие оптические системы, такие как широкополосные электрооптические модуляторы, светофильтры Лيو и светофильтры Шольца, используют прохождение света через последовательность поляризаторов и фазовых пластинок. Действие каждого такого элемента (поляризатора или фазовой пластинки) на состояние поляризации распространяющегося света нетрудно рассчитать и без применения матричной алгебры. Однако в случае, когда оптическая система состоит из многих таких элементов, каждый из которых ориентирован под разным азимутальным углом, расчет всей оптической системы оказывается весьма сложным. Существенно упростить его позволяет лишь применение определенного систематического подхода. Исчисление Джонса, предложенное Р. Джонсом в 1941 г. [9], представляет собой мощный матричный метод, в котором состояние поляризации задается двухкомпонентным вектором – вектором Джонса, смысл которого мы рассмотрели ранее, а каждый оптический элемент описывается матрицей 2×2 . Общая матрица полной системы получается перемножением всех таких матриц, а состояние поляризации распространяющегося света вычисляется как произведение вектора, определяющего поляризацию входного пучка, на общую матрицу [7].

§ 1. Формализм матриц Джонса

Рассмотрим однородную монохроматическую плоскую ТЕ волну, падающую на недеполяризующую оптическую систему, состоящую либо из отдельного оптического элемента, либо из после-

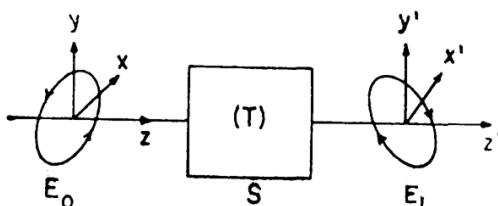


Рис. 4.1. Падающая и выходящая из оптической системы S плоские волны характеризуются векторами Джонса \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_1 , отнесенными к декартовым системам координат (x, y, z) и (x', y', z') на входе и выходе системы S $\mathbf{E}_1 = (T)\mathbf{E}_0$, где (T) – матрица Джонса для системы S

довательности таких элементов. В результате взаимодействия падающей волны с оптической системой на выходе системы появляется одна или несколько модифицированных плоских волн. На рис. 4.1 представлены принципиальная схема оптической системы, падающая волна и одна из выходящих модифицированных плоских волн. Две фиксированные в пространстве правосторонние декартовы системы координат (x, y, z) и (x', y', z') связаны с падающей и выходящей плоскими волнами, направления z и z' параллельны волновым векторам \mathbf{k} и \mathbf{k}' соответственно (\mathbf{k} и \mathbf{k}' могут быть непараллельными). Опорные координатные плоскости $z = 0$ и $z' = 0$ на входе и выходе расположены произвольно, хотя обычно эти плоскости располагают непосредственно перед входной и непосредственно после выходной поверхностями системы (прибора).

Оси координат (x, y) и (x', y') на входе и выходе могут иметь любую азимутальную ориентацию относительно волновых векторов падающей и выходящей волн \mathbf{k} и \mathbf{k}' .

Пусть падающая и выходящая плоские волны описываются их векторами Джонса \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_1 , отнесенными к системам координат на входе и выходе. Вектор Джонса \mathbf{E}_0 на входе представляет собой комплексный 2×1 вектор-столбец, элементами которого E_{0x} и E_{0y} являются синусоидальные колебания декартовых проекций

электрического вектора падающей световой волны на оси координат x и y . Подобным же образом элементами $E_{1x'}$ и $E_{1y'}$ вектора Джонса \mathbf{E}_1 на выходе являются синусоидальные колебания декартовых проекций электрического вектора выходящей волны на оси координат x' и y' . В отсутствие нелинейности и других процессов, приводящих к изменению частоты, пара колебаний $E_{1x'}$ и $E_{1y'}$ на выходе оптической системы связана с парой колебаний E_{0x} и E_{0y} на ее входе следующими линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} E_{1x'} &= T_{11}E_{0x} + T_{12}E_{0y}, \\ E_{1y'} &= T_{21}E_{0x} + T_{22}E_{0y}, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} E_{1x'} \\ E_{1y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix},$$

или коротко

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{T}\mathbf{E}_0, \quad (4.1)$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Соотношение (4.1) выражает закон взаимодействия падающей волны с оптической системой в виде простого линейного матричного преобразования вектора Джонса этой волны. *Это соотношение является основой, на которой полностью базируется формализм матрицы Джонса.* Матрица преобразования \mathbf{T} называется матрицей Джонса для оптической системы (или оптического прибора); ее элементы T_{ij} являются в общем случае комплексными числами.

Матрица Джонса зависит от:

- 1) рассматриваемой оптической системы (прибора);
- 2) частоты падающей волны (процессы, изменяющие поляризацию внутри системы, являются в общем случае дисперсионными);
- 3) ориентации системы по отношению к волновому вектору падающего пучка;

- 4) расположения опорных координатных плоскостей $z = 0$ и $z' = 0$ на входе и выходе системы соответственно;
- 5) азимутальной ориентации осей координат (x, y) и (x', y') на входе и выходе относительно волновых векторов падающего и выходящего пучков света соответственно;
- 6) данной выходящей плоской волны, если в результате взаимодействия между падающей волной и оптической системой возникает более чем одна такая волна.

Рассмотрим совместное действие двух отдельных оптических систем I и II, помещенных на пути плоской световой волны, показанных на рис. 4.2 *a*. Для простоты рассмотрим одну промежуточную и одну конечную выходящую плоскую волну. В результате взаимодействия между падающей волной и первой оптической системой I возникает промежуточная плоская волна, вектор Джонса которой определяется соотношением

$$\mathbf{E}_{\text{промеж}} = \mathbf{T}_I \mathbf{E}_0. \quad (4.2)$$

Взаимодействие между промежуточной волной и второй оптической системой II приводит к появлению конечной выходящей волны, вектор Джонса которой определяется соотношением

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{T}_{II} \mathbf{E}_{\text{промеж}}. \quad (4.3)$$

Так как нас интересует совместное действие двух систем I и II, можно исключить $\mathbf{E}_{\text{промеж}}$ путем подстановки (4.2) в (4.3). Это приводит к следующим простым соотношениям:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{T}_{II} \mathbf{T}_I \mathbf{E}_0 \quad (4.4)$$

или

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{T}_{\text{комб}} \mathbf{T}_I \mathbf{E}_0, \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{T}_{\text{комб}} = \mathbf{T}_{II} \mathbf{T}_I \quad (4.6)$$

и $\mathbf{T}_{\text{комб}}$ – матрица Джонса для комбинированной системы.

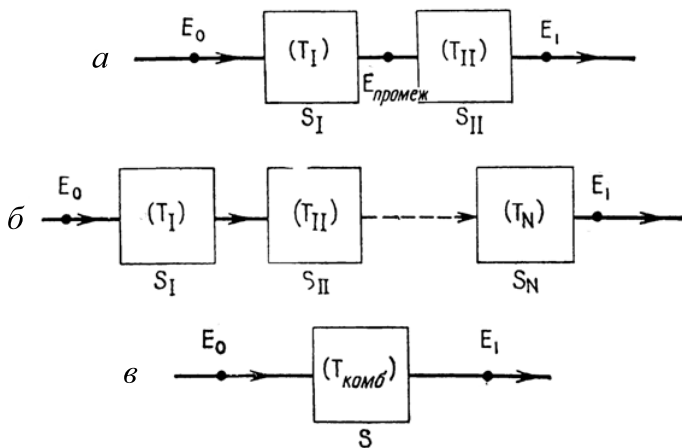


Рис. 4.2. Результат совместного действия N оптических систем S_I, S_{II}, \dots, S_N , характеризующихся матрицами Джонса $(T_I), (T_{II}), \dots, (T_N)$, эквивалентен действию одной оптической системы, описываемой матрицей Джонса $(T_{\text{комб}}) = (T_N)(T_{N-1})\dots(T_{II})(T_I)$

Полученный выше результат можно легко распространить на общий случай, когда плоская световая волна последовательно проходит через каскад из N оптических систем (приборов), как на рис. 4.2 б. Если сосредоточить внимание на одной падающей и на одной выходящей плоской волне, то общий эффект сложной многокомпонентной системы описывается соотношением

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_{II} \mathbf{T}_I \mathbf{E}_0 \quad (4.7)$$

или

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{T}_{\text{комб}} \mathbf{E}_0, \quad (4.8)$$

где

$$\mathbf{T}_{\text{комб}} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_{II} \mathbf{T}_I. \quad (4.9)$$

Из выражения (4.9) видно, что последовательность из N оптических систем (приборов) можно заменить одной составной оптической системой, полная (внешняя или конечная) матрица Джонса

которой получается путем перемножения матриц Джонса для отдельных систем (рис. 4.2, в). Так как падающая плоская волна попадает сначала на оптическую систему I, матрица Джонса T_I должна быть первой матрицей, действующей на вектор Джонса E_0 падающей волны, и стоять справа в цепочке матриц в выражении (4.7). Этот порядок следует соблюдать всегда.

§ 2. Матрица Джонса для двулучепреломляющего кристалла

Известно, что свет, распространяющийся в двулучепреломляющих кристаллах, представляет собой линейную суперпозицию двух независимых волн. Эти независимые волны характеризуются вполне определенными фазовыми скоростями и состояниями поляризации. Двулучепреломляющие кристаллы могут быть как одноосными, так и двуосными. Однако большинство широко используемых кристаллов, например, таких как кальцит и кварц, являются одноосными. В одноосных кристаллах независимые волны представляют собой обыкновенную и необыкновенную волны. Направления поляризации этих волн взаимно ортогональны и называются «медленной» и «быстрой» осями кристалла для данного направления распространения.

Из кристаллов вырезают фазовые пластинки. Их изготовление происходит обычно таким образом, чтобы s -ось располагалась в плоскости пластинки. При этом падающий нормально на пластинку свет будет распространяться в направлении, перпендикулярном s -оси [7].

Фазовые пластинки (называемые также волновыми пластинками) и фазосдвигающие устройства выполняют роль преобразователей состояния поляризации. С помощью подходящей фазовой пластинки состояние поляризации светового пучка можно преобразовать в любое другое состояние поляризации. В формализме матриц Джонса предполагается, что отражение света от любой поверхности пластинки отсутствует и что свет полностью проходит через пластинку. Практически же любая пластинка всегда име-

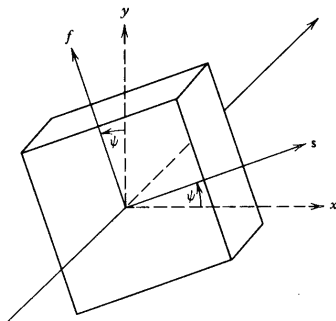


Рис. 4.3. Задерживающая фазовая пластинка, имеющая азимутальный угол ψ [7]

ет конечный коэффициент отражения, несмотря на то что большинство фазовых пластинок имеют специальное покрытие, чтобы уменьшить потери на отражение от поверхностей. Френелевские отражения на поверхностях пластинки не только уменьшают интенсивность прошедшего излучения, но и влияют также на его тонкую спектральную структуру вследствие интерференции при многократном отражении [7].

Рассмотрим фазовую пластинку (см. рис. 4.3) и падающий на нее пучок света, состояние поляризации которого описывается вектором Джонса

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где J_x и J_y – два комплексных числа. Оси x и y являются осями фиксированной лабораторной системы координат. Для того чтобы определить, как распространяется свет в фазовой пластинке, представим световую волну в виде линейной комбинации «быстрой» и «медленной» независимых волн кристалла. Это можно сделать с помощью следующего преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} J_s \\ J_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь J_s – медленная составляющая вектора поляризации J , а J_f – быстрая составляющая. «Медленная» и «быстрая» оси являются фиксированными в кристалле. Эти две составляющие представляют собой независимые (базисные) волны фазовой пластинки и распространяются со своими собственными фазовыми скоростями и поляризациями. Из-за различия в фазовых скоростях одна составляющая будет задержана относительно другой. Эта задержка изменяет состояние поляризации выходящего пучка [7].

Пусть n_s и n_f – показатели преломления медленной и быстрой составляющих соответственно. Тогда компоненты вектора Джонса выходящего пучка в кристалле в sf -системе координат изменятся на фазовые множители и будут равны, соответственно

$$J'_s = J_s \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_sl\right) \quad \text{и} \quad J'_f = J_f \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_fl\right),$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} J'_s \\ J'_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_sl\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_fl\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_s \\ J_f \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

где l – толщина пластинки, а λ – длина волны падающего света.

Фазовая задержка двух волн определяется как разность аргументов экспонент, входящих в (4.12), и равна

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)l.$$

Заметим, что фазовая задержка Γ является мерой относительного изменения фазы, а не абсолютным изменением фазы. Двулучепреломление типичной кристаллической задерживающей пластинки мало, т. е. $|n_s - n_f| \ll n_s, n_f$. Следовательно, абсолютное изменение фазы, вызванное пластинкой, может быть в сотни раз больше, чем фазовая задержка. Пусть ϕ среднее абсолютное изменение фазы:

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda}(n_s + n_f)l.$$

При этом матрицу из уравнений (4.12) можно записать через величины ϕ и Γ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} J'_s \\ J'_f \end{pmatrix} = e^{-i\phi} \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\Gamma}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\Gamma}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_s \\ J_f \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Вектор Джонса состояния поляризации выходящего пучка в системе координат xu получается с помощью обратного преобразования из кристаллической системы координат sf :

$$\begin{pmatrix} J'_x \\ J'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_s \\ J'_f \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Используя (4.11), (4.13) и (4.14), преобразование, осуществляемое задерживающей пластинкой, можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} J'_x \\ J'_y \end{pmatrix} = R(-\psi)W_0R(\psi) \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

где $R(\psi)$ – матрица поворота, а W_0 – матрица Джонса для задерживающей пластинки, которые определяются соответственно выражениями

$$R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

и

$$W_0 = e^{-i\phi} \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\Gamma}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\Gamma}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Если интерференционные эффекты не важны или не наблюдаются, то фазовым множителем $e^{-i\phi}$ можно пренебречь. Задерживающая пластинка характеризуется величиной фазовой задержки Γ и ее азимутальным углом ψ и ее можно представить произведением трех матриц, входящих в (4.15):

$$W = R(-\psi)W_0R(\psi).$$

Заметим, что матрица Джонса волновой пластинки представляет собой унитарную матрицу, т. е. $W^\dagger = W$, где значком \dagger обозначено

эрмитово сопряжение. Прохождение поляризованного света через волновую пластинку математически описывается унитарным преобразованием. Многие физические свойства остаются неизменными при унитарных преобразованиях; к этим свойствам относятся условие ортогональности между векторами Джонса, а также инвариантность их длин. Таким образом, если состояния поляризации двух пучков взаимно ортогональны, они останутся взаимно ортогональными при прохождении через произвольную волновую пластинку [7].

§ 3. Матрицы Джонса основных оптических элементов

Рассмотрим примеры поляризующих систем и запишем их матрицы Джонса.

1. *Изотропная фазовая пластинка (изотропное фазосдвигающее устройство)*. Матрица Джонса, описывающая свободное распространение плоской световой волны на расстояние l в изотропной среде с показателем преломления n без всякого взаимодействия, является самой простой. В этом случае матрица Джонса записывается в виде

$$W = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}nl\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}nl\right) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}nl} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Эта матрица выражает тот простой факт, что фаза волны, длина которой в вакууме равна λ , изменяется на величину $\frac{2\pi nl}{\lambda}$. Оптический прибор представляет собой в данном случае плоскопараллельный участок изотропной среды с показателем преломления n , через который свободно распространяется плоская волна. Толщина такого участка равна l , системы координат (x, y) и (x', y') на входе и выходе совпадают с ограничивающими плоскостями и параллельны друг другу. Описанный выше прибор можно условно назвать изотропным фазосдвигающим устройством (или фазовой пластинкой).

2. *Линейное фазосдвигающее устройство.* Предположим, что волна распространяется не через изотропную, а через одноосную линейную двулучепреломляющую среду и что направление распространения перпендикулярно оптической оси этой среды. Если волна линейно-поляризована параллельно оптической оси, то для такой волны показатель преломления среды равен n_e , и волна распространяется в рассматриваемой среде со скоростью c/n_e , где c – скорость света в вакууме. Если же волна линейно-поляризована перпендикулярно оптической оси, то для такой волны среда будет иметь другой показатель преломления n_o и волна распространяется в среде со скоростью c/n_o , n_o и n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления анизотропной одноосной среды.

Матрица Джонса подобного устройства представляет собой непосредственное обобщение соотношения (4.16) и уже было записано в терминах «быстрой» и «медленной» оптической оси:

$$W = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_e l\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_o l\right) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

На практике для получения линейного фазосдвигающего устройства изготавливается плоскопараллельная пластинка из кристалла, в которой оптическая ось параллельна входной и выходной граням. Если на такое устройство из вакуума (или воздуха) падает плоская волна, то его действие только приблизительно описывается матрицей (4.17). Это объясняется наличием многократных отражений между параллельными гранями фазосдвигающего устройства, которое действует как интерферометр Фабри-Перо. Это делает неприменимыми простые рассуждения, основанные на предположении о наличии только одной распространяющейся вперед волны.

3. *Изотропное фазосдвигающее и поглощающее устройство.* В среде, которая является одновременно изотропно-преломляющей и изотропно-поглощающей, запаздывание и затухание плоской волны, прошедшей расстояние A , не зависят от направления распространения или состояния поляризации волны. Участок среды

толщиной l действует как изотропное фазосдвигающее и поглощающее устройство и описывается матрицей Джонса следующего вида:

$$W = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(n-ik)l\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(n-ik)l\right) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

которую легко получить из матрицы Джонса для изотропной фазовой пластинки (4.16) путем подстановки комплексного показателя преломления $(n-ik)$ вместо действительного показателя преломления n . Величина k называется коэффициентом поглощения среды.

Так как поглощение и преломление среды изотропны, эллипс поляризации остается неизменным.

4. Фазовая пластинка с поглощением.

В одноосной линейной дихроичной¹ среде затухание линейно-поляризованной волны, распространяющейся в направлении, перпендикулярном оптической оси (поглощения), зависит от направления колебаний поперечного электрического поля относительно оптической оси. Для участка среды толщиной l матрицу Джонса можно получить из выражения (4.18), обобщив его следующим образом:

$$W = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-ik_e)l\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-ik_o)l\right) \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

где k_e и k_o – соответственно «необыкновенный» и «обыкновенный» коэффициенты поглощения среды для света, линейно-поляризованного параллельно и перпендикулярно оптической оси.

Для поляризации света используются различные материалы: кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением; кристаллические или изотропные тонкие пленки различных оптически активных веществ. Кристаллические поляризаторы представляют собой призматические склеенные блоки, геометрия которых обеспечивает разделение обыкновенного и необыкновенного лучей,

¹Дихроизм – явление различного поглощения веществом света в зависимости от поляризации.

имеющих ортогональные плоскости поляризации. Такие оптические элементы позволяют получать полностью поляризованные световые лучи. Степень поляризации тонких пленок зависит от длины волны света. Такие пленки принято называть поляроидами.

Вращение плоскости поляризации света (поворот плоскости поляризации линейно поляризованного света при его прохождении через вещество) наблюдается так же в средах, обладающих двойным круговым лучепреломлением, т. е. различными показателями преломления для право- и левополяризованных по кругу лучей.

Линейно поляризованный пучок света, как упоминалось ранее, можно представить как результат сложения двух лучей, распространяющихся в одном направлении и поляризованных по кругу с противоположными направлениями вращения. Если такие два луча распространяются в теле с различными скоростями, то это приводит к повороту плоскости поляризации суммарного луча.

Среды, обладающие оптической анизотропией, по-разному поглощают лучи различных поляризаций. В частности, в областях собственных и примесных полос поглощения света двулучепреломляющие среды неодинаково поглощают обыкновенный и необыкновенный лучи, что и составляет их линейный дихроизм. Если толщина пластинки, вырезанной из анизотропного кристалла (с полосами поглощения в нужной области спектра) параллельно его оптической оси, достаточна, чтобы один из лучей поглотился практически нацело, то прошедший через пластинку свет будет полностью поляризован. Такие поляризаторы называют дихроичными. К дихроичным относятся и поляроиды, поглощающее вещество которых может быть как кристаллическим, так и нет.

5. *Линейный частичный поляроид.* Рассмотрим тонкую пленку изотропного оптически-активного вещества – поляроид, его матрица Джонса аналогично выражениям (4.18) и (4.19) имеет вид

$$W = e^{(-i\frac{2\pi}{\lambda}nl)} \begin{pmatrix} \exp(-\frac{2\pi}{\lambda}k_e l) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{2\pi}{\lambda}k_o l) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

здесь внешний скалярный множитель описывает изотропную задержку по фазе. Величина $(k_e - k_o)$ является мерой дихроизма среды и может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, какая величина больше, k_e или k_o . Участок линейной дихроичной среды, описанной выше, действует как линейный частичный поляризатор. Термин «частичный поляризатор» применяется потому, что падающий (неполяризованный) свет, проходя через участок среды, обладающий описанными свойствами, превращается в частично поляризованный².

Приведенные выше рассуждения основаны на предположении, что участок бесконечной среды не выделяется фактически из среды. Следовательно, для устройства, представляющего собой плоскопараллельную пластинку из линейно-дихроичного материала (с оптической осью, параллельной граням), матрицу Джонса (4.20) следует рассматривать только как приближение.

6. *Идеальный линейный однородный пленочный поляризатор.* Существенным свойством поляризаторов является значительная анизотропия поглощения: поглощение максимально для колебаний, параллельных оптической оси и минимально для колебаний, перпендикулярных оси, т.е. $k_e \gg k_o$. Частным случаем линейно-дихроичного прибора является идеальный линейный поляризатор. Для него $k_e = 0$, $k_o = \infty$ и матрица Джонса принимает простой вид

$$W = e^{(-i\frac{2\pi}{\lambda}nl)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где первый сомножитель описывает изотропные свойства преломляющей среды. Для реального линейного поляризатора $k_e \approx 0$, $k_o \gg 1$ и матрица (4.21) применима только как приближение.

Идеальный линейный поляризатор свободно пропускает или полностью гасит падающий линейно-поляризованный свет в зависимости от того, параллельно или перпендикулярно направлению линейной поляризации оси пропускания поляризатора. Ось

²Обычно происходит увеличение степени поляризации падающего частично поляризованного света.

пропускания линейного поляризатора – это ось, вдоль которой коэффициент поглощения равен нулю (или очень мал), тогда как вдоль оси гашения коэффициент поглощения имеет бесконечно большую величину. В приведенном выше примере ось пропускания совпадает с оптической осью дихроизма, а матрица (4.21) представляет наиболее известный тип дихроичного поляризатора – поляроидную пластинку (или поляроид).

Приведем еще один подход нахождения матрицы Джонса для идеального однородного линейного пленочного поляризатора.

Пусть плоскость пропускания поляризатора параллельна оси x . Такой прибор позволяет пройти колебаниям поля, параллельным оси x , так что вектор Джонса падающего луча, имеющий вид

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta} \end{pmatrix},$$

после прохождения через поляризатор будет иметь компоненты

$$J'_x = J_x \quad \text{и} \quad J'_y = 0.$$

Компоненты векторов Джонса входного и выходного лучей связаны матрицей Джонса

$$\begin{pmatrix} J'_x \\ J'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix},$$

подставляя компоненты задачи, имеем систему уравнений, справедливых для любых значений J_x и J_y :

$$\begin{aligned} J_x &= M_{11}J_x + M_{12}J_y, \\ 0 &= M_{21}J_x + M_{22}J_y. \end{aligned}$$

Если принять $J_y = 0$, а $J_x \neq 0$, то $M_{11} = 1$, $M_{21} = 0$. В случае $J_x = 0$, а $J_y \neq 0$, то $M_{12} = 0$, $M_{22} = 0$.

Таким образом, матрица Джонса идеального поляризатора имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Часто оказывается удобным данную матрицу Джонса привести к другому виду путем домножения на любой фазовый множитель, например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где φ – абсолютная фаза, учитывающая конечную оптическую толщину поляризатора (см. матрицу (4.21)).

Очевидно, что если плоскость пропускания поляризатора параллельна оси y и пренебречь абсолютной фазой φ , то матрица Джонса записывается в виде

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. *Полуволновая пластинка.* Полуволновая пластинка имеет фазовую задержку $\Gamma = \pi$. Пластинка X - или Y -среза одноосного кристалла действует как полуволновая пластинка, если ее толщина равна $l = (n_e - n_o)\lambda/2$.

Найдем, как изменится состояние поляризации света, прошедшего через полуволновую пластинку. Пусть азимутальный угол ψ волновой пластинки равен 45° , а падающий пучок поляризован вертикально. Тогда вектор Джонса падающего пучка можно записать как

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

а матрица Джонса для полуволновой пластинки получается с использованием выражений (4.15):

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Вектор Джонса для выходящего пучка получается перемножением матриц (4.23) и (4.22), что дает

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор отвечает горизонтально поляризованному свету. Таким образом, полуволновая пластинка приводит к повороту вектора поляризации на 90° . Можно показать, что для произвольного азимутального угла ψ полуволновая пластинка поворачивает вектор поляризации на угол 2ψ [7]. Иными словами, *линейно поляризованный свет остается линейно поляризованным, только плоскость его поляризации поворачивается на угол 2ψ .*

Если падающий свет имеет круговую поляризацию, то полуволновая пластинка будет преобразовывать свет с правой круговой поляризацией в свет с левой круговой поляризацией и наоборот, независимо от азимутального угла [7].

8. *Четвертьволновая пластинка.* Четвертьволновая пластинка создает фазовую задержку $\Gamma = \pi/2$. Если пластинка представляет собой X -срез (или Y -срез) одноосного анизотропного кристалла, то ее толщина должна быть равна $l = (n_e - n_o)\lambda/2$ (или кратна четному числу этой величины). Снова предположим, что азимутальный угол пластинки равен 45° и что падающий пучок вертикально поляризован. Вектор Джонса падающего пучка дается выражением (4.22). В соответствии с (4.15) матрица Джонса для этой четвертьволновой пластинки запишется в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Вектор Джонса выходного пучка получается умножением матрицы (4.24) на вектор-столбец (4.22):

$$\mathbf{J}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Он отвечает свету с левой круговой поляризацией. Таким образом, воздействие четвертьволновой пластинки, ориентированной под углом 45° , приводит к преобразованию вертикально поляризованного света в свет с левой круговой поляризацией. Если

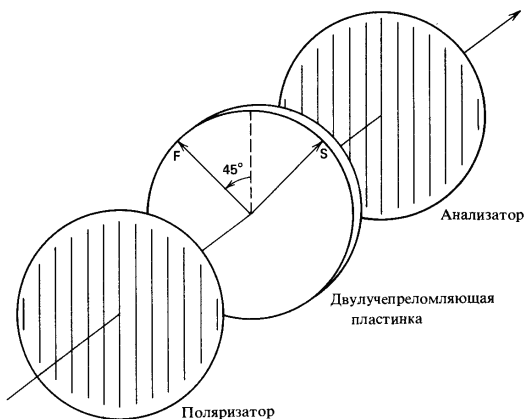


Рис. 4.4. Двулучепреломляющая (фазовая пластинка), расположенная между параллельными поляризаторами [7]

падающий пучок горизонтально поляризован, то выходной пучок будет иметь правую круговую поляризацию [7].

9. *Двулучепреломляющая (фазовая пластинка), расположенная между параллельными поляризаторами.* Рассмотрим двулучепреломляющую пластинку между парой параллельных поляризаторов, как показано на рис. 4.4.

Предположим, что пластинка ориентирована таким образом, что «медленная» и «быстрая» оси составляют угол 45° с осью поляризатора. Пусть двулучепреломление равно $n_e - n_o$ и толщина пластинки l . Соответствующая матрица Джонса с учетом (4.15) имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Gamma}{2} & -i \sin \frac{\Gamma}{2} \\ -i \sin \frac{\Gamma}{2} & \cos \frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Пусть падающий пучок является неполяризованным. Тогда состояние поляризации вектора напряженности электрического поля после прохождения пучка через первый поляризатор можно

записать в виде вектора Джонса

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор записан с учетом предположения, что интенсивность падающего пучка равна единице, а через поляризатор проходит только половина интенсивности. Вектор Джонса пучка, прошедшего через пластинку и второй поляризатор, можно найти следующим образом:

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Gamma}{2} & -i \sin \frac{\Gamma}{2} \\ -i \sin \frac{\Gamma}{2} & \cos \frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Таким образом, прошедший пучок оказывается вертикально (вдоль оси y) поляризованным.

10. *Двулучепреломляющая (фазовая) пластинка, расположенная между скрещенными поляризаторами.* Если повернуть анализатор, изображенный на рис. 4.4, на угол 90° , то поляризаторы, помещенные на входе и выходе системы, окажутся скрещенными. В этом случае вектор Джонса для прошедшего пучка запишется в виде

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Gamma}{2} & -i \sin \frac{\Gamma}{2} \\ -i \sin \frac{\Gamma}{2} & \cos \frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\Gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Этот пучок оказывается горизонтально (вдоль оси x) поляризованным.

В указанных выше примерах наглядно представлено правило нахождения матрицы Джонса любого устройства: если пучок света проходит ряд последовательно установленных приборов, то параметры пучка на выходе такой системы вычисляются путем перемножения соответствующих этим приборам матриц Джонса. Для приборов, через которые проходит поляризованный свет, компоненты вектора напряженности электрического поля луча, прошедшего через прибор, линейно связаны с компонентами вектора электрического поля исходного луча, и матрица, связывающая

компоненты прошедшего луча с компонентами исходного луча, позволяет нам описать характеристики прибора [4].

Матрицы Джонса основных оптических элементов для удобства использования при решении задач представлены в табл. 4.1.

Табл. 4.1. Примеры различных матриц Джонса

Оптический элемент	Матрица Джонса
Изотропный слой	$\begin{pmatrix} \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda}nl) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda}nl) \end{pmatrix}$
Фазовая пластинка	$\begin{pmatrix} \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_s l) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda}n_f l) \end{pmatrix}$
Фазовая пластинка с поглощением	$\begin{pmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_f \end{pmatrix},$ где $M_s = \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda}(n_s - ik_s)l)$, $M_f = \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda}(n_f - ik_f)l)$
Фазовая пластинка с оптической осью под углом φ к горизонтальной оси вызывает фазовую задержку δ	$\begin{pmatrix} c^2 + s^2 \exp(-i\delta) & sc(1 - \exp(-i\delta)) \\ sc(1 - \exp(-i\delta)) & s^2 + c^2 \exp(-i\delta) \end{pmatrix},$ где $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$
Полуволновая пластинка с быстрой осью, направленной вдоль оси x	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Четвертьволновая пластинка с быстрой осью, направленной вдоль оси x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
Левополяризатор	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
Правополяризатор	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 4.1

Оптический элемент	Матрица Джонса
Линейный неидеальный поляризатор с вертикальной осью пропускания	$\begin{pmatrix} t_{min} & 0 \\ 0 & t_{max} \end{pmatrix}, t_{min} \approx 0, t_{max} \approx 1$
Линейный (идеальный) пленочный поляризатор с осью пропускания, повернутой на угол φ	$\begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$
<i>Линейный (идеальный) поляризатор с горизонтальной осью пропускания</i>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
<i>Линейный (идеальный) поляризатор с вертикальной осью пропускания</i>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
<i>Линейный (идеальный) поляризатор с осью пропускания под углом 45°</i>	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
<i>Линейный (идеальный) поляризатор с осью пропускания под углом -45°</i>	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

§ 4. Интенсивность излучения, прошедшего через оптическую систему

До сих пор мы использовали исчисление Джонса для расчета состояния поляризации светового пучка. Во многих случаях приходится определять интенсивность излучения, прошедшего через оптическую систему. Например, узкополосный фильтр пропускает излучение только в узком спектральном диапазоне и отклоняет (или поглощает) излучение других длин волн. Для изменения интенсивности распространяющегося пучка света обычно используют анализатор. Анализаторами в основном служат поляризаторы, и называют их так просто из-за их расположения в оптической системе. В большинстве двулучепреломляющих оптических систем

поляризатор помещают перед системой, чтобы «приготовить» поляризованный свет. Второй поляризатор (анализатор) помещают на выходе для анализа состояния поляризации выходящего пучка. Поскольку фазовая задержка в каждой волновой пластинке зависит от длины волны, состояние поляризации выходящего пучка также зависит от длины волны света. Расположенный сзади поляризатор приводит к тому, что полная интенсивность прошедшего излучения оказывается зависящей от длины волны. В представлении векторов Джонса мы имеем информацию не только о состоянии поляризации светового пучка, но и о его интенсивности [7].

Рассмотрим теперь световой пучок, прошедший через поляризатор. Его вектор электрического поля можно записать в виде вектора Джонса

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

При этом интенсивность излучения рассчитывается следующим образом:

$$I = \mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E} = |E_x|^2 + |E_y|^2. \quad (4.28)$$

Здесь знак \dagger , как и выше, означает эрмитово сопряжение. Если вектор Джонса выходящего пучка после его прохождения через анализатор записать в виде

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix},$$

то коэффициент пропускания двулучепреломляющей оптической системы вычисляется следующим образом:

$$T = \frac{|E'_x|^2 + |E'_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}. \quad (4.29)$$

Найдем интенсивность луча, прошедшего через двулучепреломляющую пластинку, ориентированную под 45° и расположенную между параллельными (случай *a*) и скрещенными (случай *б*) поляризаторами.

В случае *a* прошедший пучок оказывается вертикально поляризованным с вектором Джонса (4.26), а его интенсивность в соответствии с (4.31) дается выражением

$$I = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \Gamma = \frac{1}{2} \cos^2 \left[\frac{\pi(n_e - n_o)l}{\lambda} \right].$$

Из этого выражения видно, что интенсивность прошедшего пучка является синусоидальной функцией волнового числа и максимальна при $\lambda = (n_e - n_o)l$, $(n_e - n_o)l/2$, $(n_e - n_o)l/3$ и т.д., причем расстояние между волновыми числами, отвечающими максимумам интенсивности, возрастает с уменьшением толщины пластинки.

В случае *b* прошедший пучок горизонтально поляризован с вектором Джонса (4.27), а его интенсивность в соответствии с (4.31) дается выражением

$$I = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} \Gamma = \frac{1}{2} \sin^2 \left[\frac{\pi(n_e - n_o)l}{\lambda} \right],$$

которое снова является синусоидальной функцией волнового числа. Спектр пропускания состоит из ряда максимумов, соответствующих $\lambda = 2(n_e - n_o)l$, $2(n_e - n_o)l/3$ и т.д. Эти длины волн отвечают фазовым задержкам, равным π , 3π , 5π , ... , т. е. случаю, когда волновая пластинка становится полуволновой или кратна нечетному числу полуволновых пластинок.

§ 5. Поляризационные интерференционные фильтры

Спектральные фильтры могут быть основаны на использовании интерференции поляризованного света. Такие фильтры играют важную роль во многих оптических системах, от которых требуется выделение чрезвычайно узкой полосы частот с широкой угловой расходимостью или способность настройки. Например, в задачах физики Солнца распределение водорода может быть измерено путем фотографирования солнечной короны в свете линии излучения $H\alpha$ ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$). Поскольку излучается большое количество энергии света на соседних длинах волн, для выделения этой линии необходимо иметь фильтр с чрезвычайно узкой

($\sim 1 \text{ \AA}$) полосой пропускания. Такие фильтры состоят из двулучепреломляющих кристаллических пластинок (волновых пластинок) и поляризаторов. Двумя основными разновидностями таких двулучепреломляющих фильтров являются фильтры Лио — Эмана и фильтры Шольца. В них используется интерференция поляризованного света, которая требует при прохождении излучения через кристалл определенной задержки между составляющими света, поляризованными параллельно «быстрой» и «медленной» осям кристалла. Поскольку фазовая задержка, создаваемая волновой пластинкой, пропорциональна двулучепреломлению кристалла, при реализации такого фильтра желательно иметь кристаллы с большим двулучепреломлением $n_e - n_o$. Обычно для этой цели наиболее широко применяются такие материалы, как кварц, кальцит и ADP ($(\text{NH}_4)\text{H}_2\text{PO}_4$) [7].

Применим исчисление Джонса для изучения характеристик фильтра Шольца. Фильтр Шольца, названный по имени его изобретателя [10], представляет собой стопку идентичных двулучепреломляющих пластинок, каждая из которых ориентирована под определенным азимутальным углом. Азимутальный угол каждой пластинки измеряется относительно оси пропускания переднего поляризатора. Весь столбик двулучепреломляющих пластинок помещен между парой поляризаторов.

Скрещенный фильтр Шольца. Данный фильтр представляет собой последовательность $N = 2m$ одинаковых двулучепреломляющих пластинок, помещенных между двумя скрещенными поляризаторами. Без ограничения общности можно считать, что пропускающая ось у первого поляризатора параллельна оси x , а у второго – оси y . В табл. 4.2 приведены азимутальные углы отдельных пластинок. Геометрия фильтра Шольца из шести пластинок изображена на рис. 4.5.

Каждая нечетная пластинка, составляющая данный фильтр, повернута на угол φ против часовой стрелки, а каждая четная – на тот же угол, но уже по часовой стрелке, если смотреть по направлению распространения луча. Таким образом, весь фильтр, не считая входного и выходного поляризаторов, разбивается на m аб-

Табл. 4.2. Скрещенные фильтры Шольца

Оптический элемент	Азимутальный угол
Передний поляризатор	0°
Пластинка 1	φ
Пластинка 2	$-\varphi$
Пластинка 3	φ
.	.
.	.
.	.
Пластинка N	$(-1)^{N-1}\varphi$
Задний поляризатор	90°

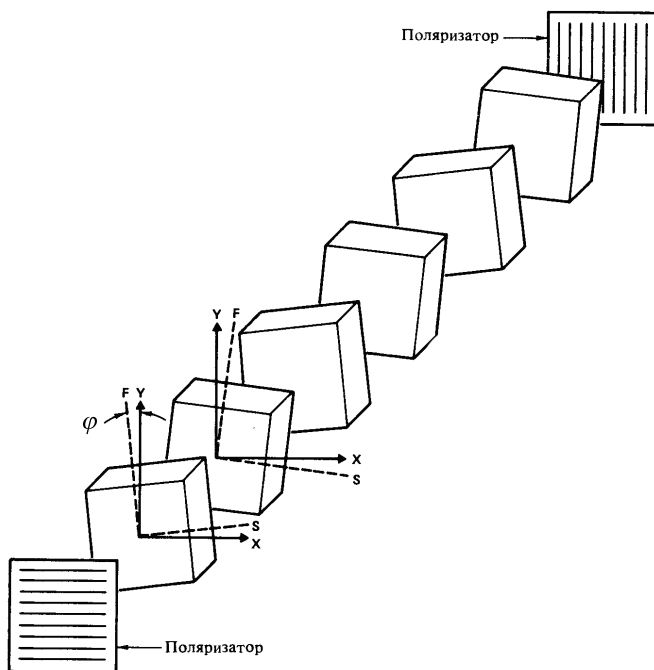


Рис. 4.5. Скрещенный фильтр Шольца из шести пластинок

солютно одинаковых элементов. Следовательно, матрица Джонса такой периодической системы равна матрице Джонса одного элемента, возведенной в степень m :

$$W' = [R(\varphi)W_0R(-\varphi)R(-\varphi)W_0R(\varphi)]^m = M^m, \quad (4.30)$$

где $R(\varphi)$ – матрица поворота, а W_0 определяется следующим выражением:

$$W_0 = \begin{bmatrix} \exp(-i\Gamma/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\Gamma/2) \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы в выражении (4.30), получаем

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где

$$A = [\cos(\Gamma/2) - i \sin(\Gamma/2) \cos 2\varphi]^2 + \sin^2(\Gamma/2) \sin^2 2\varphi,$$

$$B = \sin 4\varphi \sin^2(\Gamma/2),$$

$$C = -\sin 4\varphi \sin^2(\Gamma/2) = -B,$$

$$D = [\cos(\Gamma/2) + i \sin(\Gamma/2) \cos 2\varphi]^2 + \sin^2(\Gamma/2) \sin^2 2\varphi = A^*,$$

а Γ – фазовая задержка каждой пластинки. Следует заметить, что эта матрица является унимодулярной (т. е. $AD - BC = 1$), поскольку в (4.30) унимодулярны все матрицы. Используя тождество Чебышева [9], матрицу M^m можно записать в виде

$$M^m = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} AU_{m-1} - U_{m-2} & BU_{m-1} \\ CU_{m-1} & DU_{m-1} - U_{m-2} \end{bmatrix},$$

где

$$U_N = \frac{\sin[(N+1)K\Lambda]}{\sin[K\Lambda]},$$

$$K\Lambda = \arccos[(A+D)/2].$$

Падающая и выходящая из системы волны связаны между собой соотношением

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = P_y M^m P_x \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Выходящий пучок поляризован в направлении y , причем его амплитуда дается выражением

$$E'_y = W'_{21} E_x.$$

Если падающий пучок линейно поляризован в направлении оси x , то коэффициент пропускания фильтра равен

$$T = |W'_{21}|^2.$$

Получаем

$$T = \left| \sin 4\varphi \sin^2(\Gamma/2) \frac{\sin mK\Lambda}{\sin K\Lambda} \right|^2,$$

где

$$\cos K\Lambda = 1 - 2 \cos^2 2\varphi \sin^2(\Gamma/2).$$

Коэффициент пропускания T часто выражают через новую переменную χ , определяемую следующим образом:

$$K\Lambda = \pi - 2\chi.$$

Выраженный через эту новую переменную χ коэффициент пропускания принимает вид

$$T = \left| \operatorname{tg} 2\varphi \cos \chi \frac{\sin N\chi}{\sin \chi} \right|^2, \quad (4.31)$$

где $\cos \chi = \cos 2\varphi \sin \frac{1}{2}\Gamma$.

Из (4.31) следует, что, когда фазовая задержка каждой пластинки имеет значения $\Gamma = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, т. е. каждая пластинка становится полуволновой, коэффициент пропускания равен $T = \sin^2 2N\varphi$. При азимутальном угле

$$\varphi = \frac{\pi}{4N}$$

коэффициент пропускания равен 100%. Такое пропускание при этих условиях нетрудно объяснить, если рассмотреть состояние поляризации после прохождения излучения через каждую пластинку внутри фильтра Шольца. Напомним, что при прохождении через полуволновую ($\Gamma = \pi, 3\pi, \dots$) пластинку азимутальный угол между вектором поляризации и быстрой (или медленной) осью кристалла меняет знак. После прохождения через передний поляризатор свет оказывается линейно поляризованным в направлении оси x (азимутальный угол $\psi = 0$). Поскольку первая пластинка имеет азимутальный угол φ , пучок после прохождения первой пластинки оказывается линейно поляризованным с азимутальным углом $\psi = 2\varphi$. Вторая пластинка ориентирована с азимутальным углом $-\varphi$ и составляет угол 3φ с вектором поляризации падающего на нее пучка. Направление поляризации на выходной стороне этой пластинки будет повернуто на угол 6φ и ориентировано под азимутальным углом -4φ (рис. 4.6). Пластинки ориентированы последовательно под углами $+\varphi, -\varphi, +\varphi, -\varphi, \dots$, в то время как направления поляризации на выходе из пластинок имеют значения $2\varphi, -4\varphi, 6\varphi, -8\varphi, \dots$. Таким образом, конечный азимутальный угол после N пластин при этом равен $2N\varphi$. Если этот конечный азимутальный угол равен 90° (т. е. $2N\varphi = \pi/2$), то свет проходит через задний поляризатор без какого-либо изменения интенсивности. Свет на других длинах волн, для которых пластинки не являются полуволновыми, не испытывает вращения поляризации на угол 90° и поглощается задним поляризатором [7].

С точки зрения распространения волн фильтр Шольца можно также рассматривать как периодическую среду, в которой изменение азимутальных углов кристаллических осей создает периодическое возмущение по отношению к обоим независимым волнам и приводит к связи между быстрой и медленной независимыми волнами. Поскольку эти волны распространяются с различными фазовыми скоростями, полный обмен электромагнитной энергией возможен только в том случае, когда возмущение является периодическим, что позволяет поддерживать соотношения, необходимые для непрерывного обмена энергией между быстрой и медлен-

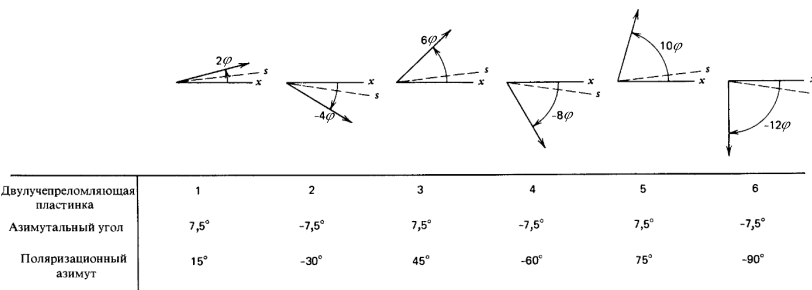


Рис. 4.6. Состояние поляризации внутри скрещенного фильтра Шольца из шести пластинок. Штриховые линии указывают направления медленной оси; стрелками указаны направления поляризации

ной волнами и наоборот. Основное физическое объяснение этого явления состоит в следующем: если энергия должна постепенно перекачиваться с расстоянием из моды А в моду В под действием статического возмущения, то необходимо, чтобы обе волны распространялись с одинаковой фазовой скоростью. Если фазовые скорости не равны друг другу, то падающая волна А постепенно будет расфазироваться с волной В, с которой она связана. Это ограничивает полное количество энергии, которым можно обмениваться. Такой ситуации можно избежать, если знак возмущения меняется на противоположный всякий раз, когда рассогласование по фазе (между связанными полями) равно π . Это меняет знак перекачки энергии и таким образом поддерживает правильное фазовое соотношение для непрерывной перекачки энергии [7].

Представляют интерес и заслуживают некоторого изучения характеристики пропускания фильтра Шольца в окрестности основного и побочных максимумов. Предположим, что каждая пластинка толщиной l имеет показатели преломления n_e и n_o .

Пусть λ_ν – длина волны, при которой задержка по фазе равна $(2\nu+1)\pi$. Фазовая задержка для произвольной длины волны равна

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)l.$$

Если λ мало отличается от λ_ν , т.е. $\lambda - \lambda_\nu \ll \lambda_\nu$, то Γ можно приближенно записать в виде

$$\Gamma = (2\nu + 1)\pi + \Delta\Gamma, \quad \text{где} \quad \Delta\Gamma = \frac{(2\nu + 1)\pi}{\lambda_\nu}(\lambda - \lambda_\nu).$$

Предположим теперь, что азимутальный угол пластинки удовлетворяет условию $\varphi = \frac{\pi}{4N}$, а $N \gg 1$. При этих условиях тригонометрическую функцию в выражении $\cos K\Lambda = 1 - 2\cos^2 2\varphi \sin^2(\Gamma/2)$ можно разложить в ряд, что дает

$$\chi \approx \frac{\pi}{2N} \left[1 + \left(\frac{N\Delta\Gamma}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Подставляя χ в (4.31), получаем

$$T = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{N\Delta\Gamma}{\pi} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{N\Delta\Gamma}{\pi} \right)^2}} \right)^2. \quad (4.32)$$

Это приближенное выражение для коэффициента пропускания справедливо при $N \gg 1$ и $\lambda - \lambda_\nu \ll \lambda_\nu$.

С помощью (4.32) можно оценить ширину главного максимума. Первый ноль функции (4.32) совпадает со вторым нулем синуса, стоящего в числителе. Следовательно:

$$\Delta\Gamma = \frac{\pi\sqrt{3}}{N}.$$

Тогда полная ширина полосы пропускания по критерию $1/2$ от максимума пропускания в длинах волн равна

$$\Delta\lambda_{1/2} \approx \sqrt{3} \left[\frac{\lambda_\nu}{(2\nu + 1)N} \right].$$

Таким образом, для создания узкополосного фильтра Шольца с шириной полосы пропускания 1 \AA , необходимой для наблюдения линии $\text{H}\alpha$ ($\lambda_0 = 6563 \text{ \AA}$), требуется приблизительно 10^4 полуволновых ($\nu = 0$) пластинок. Спектр пропускания состоит из

главного максимума при λ_0 и ряда побочных максимумов около него. В соответствии с (4.32) эти вторичные максимумы имеют место приблизительно при условии

$$\sqrt{1 + \left(\frac{N\Delta\Gamma}{\pi}\right)^2} \approx 2l + 1, \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

причем коэффициент пропускания дается выражением

$$T \approx \frac{1}{(2l + 1)^2}.$$

Заметим, что ширина полосы пропускания обратно пропорциональна полному числу пластинок, а высота побочных максимумов достаточно быстро спадает: уже первый побочный максимум меньше главного максимума примерно в 9 раз.

На рис. 4.7 представлен расчетный спектр пропускания скрещенного фильтра Шольца.

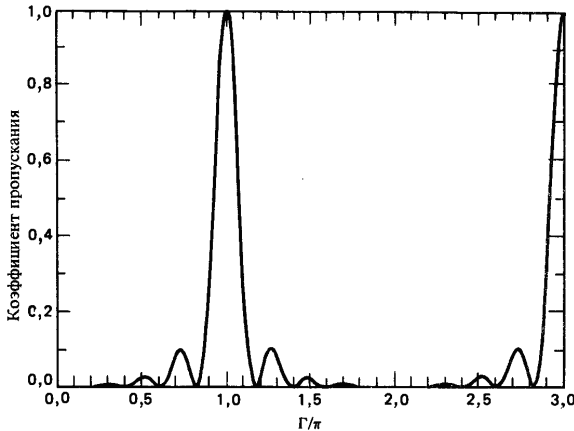


Рис. 4.7. Расчетный спектр пропускания скрещенного фильтра Шольца [7]

Веерный фильтр Шольца. Веерный фильтр Шольца также представляет собой стопу одинаковых двулучепреломляющих пластинок, каждая из которых ориентирована под определенным азимутальным углом. В табл. 4.3 приведена краткая характеристика типичного веерного фильтра Шольца, а геометрическое расположение его элементов показано на рис. 4.8. Согласно методу матриц Джонса, сформулированному в предыдущем разделе, полная матрица для этих N пластинок дается выражением

Табл. 4.3. Веерный фильтр Шольца

Оптический элемент	Азимутальный угол
Передний поляризатор	0°
Пластинка 1	φ
Пластинка 2	3φ
Пластинка 3	5φ
.	.
.	.
.	.
Пластинка N	$(2N - 1)\varphi = \pi/2 - \varphi$
Задний поляризатор	0°

$$\begin{aligned}
 M &= R\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right)W_0R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\dots \times R(-5\varphi)W_0R(5\varphi) \times \\
 &\quad \times R(-3\varphi)W_0R(3\varphi)R(-\varphi)W_0R(\varphi) = \\
 &= R\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right)[W_0R(2\varphi)]^N R(-\varphi), \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

где мы использовали следующее тождество для матриц поворота:

$$R(\rho_1)R(\rho_2) = R(\rho_1 + \rho_2).$$

Заметим, что в произведении (4.33) последняя пластинка всегда оказывается первой.

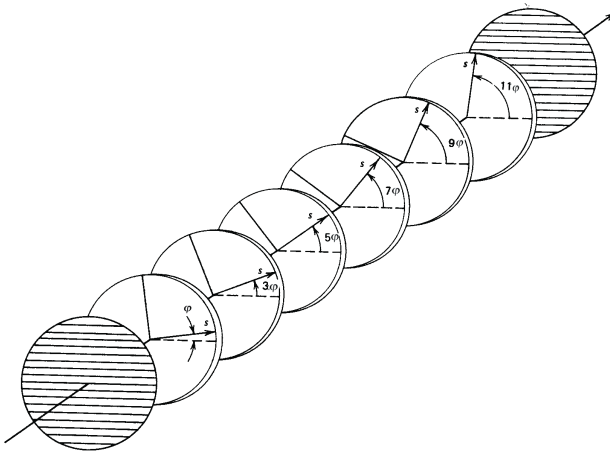


Рис. 4.8. Векрный фильтр Шольца из шести пластинок

Используя тождество Чебышева и выполняя матричное умножение в (4.33), получаем

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \sin 2\varphi \cos \frac{1}{2}\Gamma \frac{\sin N\chi}{\sin \chi}, \\
 M_{12} &= -\cos N\chi - i \sin \frac{1}{2}\Gamma \frac{\sin N\chi}{\sin \chi}, \\
 M_{21} &= \cos N\chi - i \sin \frac{1}{2}\Gamma \frac{\sin N\chi}{\sin \chi}, \\
 M_{22} &= M_{11},
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

где $\cos \chi = \cos 2\varphi \cos \Gamma/2$. Эти выражения представляют собой элементы полной матрицы Джонса, исключая поляризаторы.

Таким образом, падающая \mathbf{E} и выходящая \mathbf{E}' волны связаны между собой соотношением

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Выходящий пучок оказывается горизонтально поляризованным (вдоль оси x) с амплитудой, определяемой выражением

$$E'_x = M_{11}E_x.$$

Если падающая волна линейно поляризована в направлении оси x , то коэффициент пропускания равен

$$T = |M_{11}|^2.$$

Из выражения (4.34) получаем следующее выражение для коэффициента пропускания:

$$T = \left| \operatorname{tg} 2\varphi \cos \chi \frac{\sin N\chi}{\sin \chi} \right|^2, \quad (4.35)$$

где $\cos \chi = \cos 2\varphi \cos(\Gamma/2)$.

Следует заметить, что формула для коэффициента пропускания (4.35) формально совпадает с (4.31). Максимальное пропускание ($T = 1$) имеет место при $\Gamma = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ и $\varphi = \pi/4N$. Этот равный единице коэффициент пропускания объясняется тем, что для рассматриваемых длин волн толщина пластинки соответствует целой длине волны. Свет после прохождения через каждую пластинку будет оставаться линейно поляризованным в направлении оси x и не будет испытывать потерь в последнем поляризаторе. Свет с другими длинами волн, для которого пластинки не являются полуволновыми, не будет линейно поляризованным в направлении оси x и поглощается задним поляризатором. Пусть λ_ν – длина волны, для которой фазовая задержка $\Gamma = 2\pi\nu$. Если λ мало отличается от λ_ν (т. е. $\lambda - \lambda_\nu \ll \lambda_\nu$), то Γ дается приближенным выражением

$$\Gamma = 2\pi\nu + \Delta\Gamma = 2\pi\nu - \frac{2\pi\nu}{\lambda_\nu}(\lambda - \lambda_\nu),$$

где $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Случай $\nu = 0$ имеет место только для определенных длин волн λ_0 , для которых двулучепреломление исчезает.

Если теперь предположить, что $N \gg 1$ и использовать ту же процедуру, что и в предыдущем пункте, то можно получить следующее приближенное выражение для коэффициента пропускания:

$$T = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{N\Delta\Gamma}{\pi}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{N\Delta\Gamma}{\pi}\right)^2}} \right)^2. \quad (4.36)$$

которое совпадает с (4.32). Ширина полосы пропускания $\Delta\lambda_{1/2}$, измеренная на полувысоте максимального пропускания, дается снова выражением

$$\lambda_{1/2} = 1.60 \frac{\lambda_\nu}{2\nu N}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Спектры пропускания веерного и скрещенного фильтров Шольца совпадают с той лишь разницей, что в первом кривые сдвинуты по фазе на $\Gamma = \pi$. Иными словами, коэффициент пропускания веерного фильтра Шольца с фазовой задержкой Γ такой же, как и у скрещенного фильтра Шольца с фазовой задержкой $\Gamma + \pi$. Это можно также видеть из выражений для коэффициента пропускания этих фильтров. Расчетный спектр пропускания веерного фильтра Шольца изображен на рис. 4.9.

§ 6. Фильтр Лио–Эмана

Фильтр Лио–Эмана представляет собой последовательность N двулучепреломляющих пластинок, разделенных между собой параллельными поляризаторами. Толщины пластинок образуют геометрическую прогрессию (они равны $d, 2d, 4d, 8d, \dots$). Каждая последующая пластинка в два раза толще предыдущей. Все пластинки ориентированы под азимутальным углом 45° к оси поляризаторов.

При рассмотрении фильтра Лио–Эмана можно снова применить метод Джонса. Но если при описании фильтров Шольца сначала были перемножены все матрицы составных элементов фильтров, а потом был найден коэффициент пропускания (на этот раз

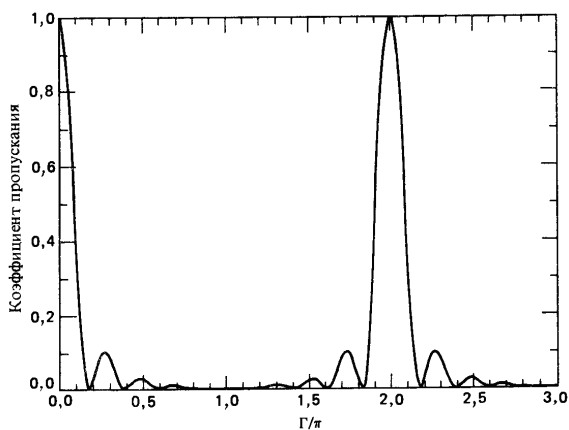


Рис. 4.9. Расчетный спектр пропускания верхнего фильтра Шольца [7]

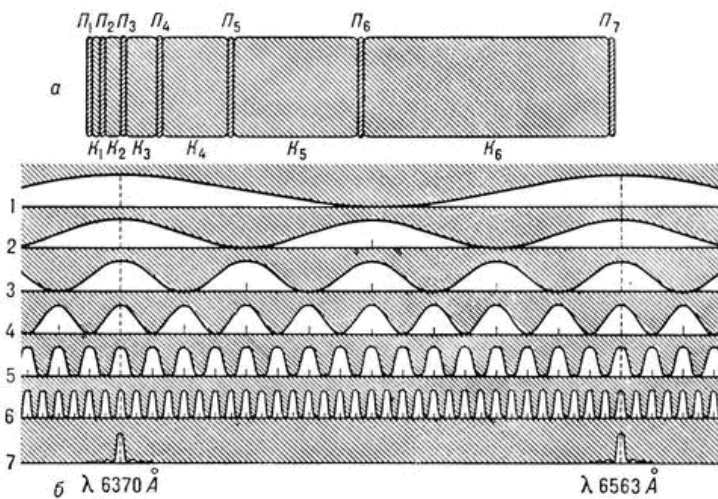


Рис. 4.10. Схема интерференционно-поляризационного светофильтра Лيو-Эмана: *а* — П — поляриды, К — кварцевые пластины; *б* — пропускание отдельных ступеней (1 — 6) и всего фильтра в целом (7); внизу указаны длины волн

проще поступить иначе). Очевидно, что фильтр Лио–Эмана можно разбить на N элементов, каждый из которых имеет свой коэффициент пропускания. Суммарный коэффициент пропускания системы будет равен произведению этих коэффициентов.

Пусть толщина первой пластинки d . Тогда толщина m -й пластинки $2^{m-1}d$, а фазовая задержка –

$$\Gamma_m = 2\pi(n_e - n_o) \frac{2^{m-1}d}{\lambda} = 2^m a.$$

Здесь $a = \pi(n_e - n_o) \frac{d}{\lambda}$, т.е. $a = \Gamma/2$.

Коэффициент пропускания прошедшего луча через фазовую пластинку, расположенную между параллельными поляризаторами и ориентированную под углом 45° к оси поляризаторов,

$$T_m = \cos^2 \frac{\Gamma_m}{2} = \cos^2 \frac{2^m a}{2} = \cos^2(2^{m-1} a).$$

Коэффициент пропускания всего фильтра равен

$$T = \cos^2(a) \cos^2(2a) \cos^2(4a) \cos^2(8a) \dots \cos^2(2^{N-1} a).$$

Если умножить и разделить это выражение на $\sin a$ и N раз воспользоваться формулой для синуса двойного угла, получится:

$$T = \left[\frac{\sin(2^N a)}{2^N \sin a} \right]^2.$$

Нетрудно убедиться, что спектральная характеристика фильтра Лио–Эмана похожа на спектральную характеристику веерного фильтра Шольца. У него имеются главные и побочные максимумы. Положение главных максимумов определяется из условия $a = \pi l$, где l – целое число. Побочные пики пропускания определяются из условия $2^N a = \pi t$, где t – целое число.

Можно показать, что полоса пропускания всего фильтра, т.е. ширина главного максимума, равна полосе пропускания самой толстой пластинки:

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda^2}{2^N d(n_e - n_o)}.$$

Свободный спектральный диапазон системы равен полосе пропускания самой тонкой пластинки

$$\Delta\lambda_0 = \frac{\lambda^2}{d(n_e - n_o)}.$$

Наконец, можно найти и добротность фильтра Лию–Эмана. Она равна отношению свободного спектрального диапазона к ширине пропускания

$$F \sim \frac{\Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_{1/2}} = 2^N.$$

§ 7. Распространение света в анизотропной среде с кручением

Применим исчисление Джонса для исследования распространения электромагнитных волн через анизотропную среду со слабым кручением. Типичным примером такой задачи является распространение света в нематических жидких кристаллах с кручением. Этот случай аналогичен веерному фильтру Шольца, число пластинок N которого стремится к бесконечности, а толщина пластинок стремится к нулю как $1/N$. Действительно, анизотропную среду с кручением можно разделить на N слоев, предполагая, что каждый слой представляет собой волновую пластинку с некоторой фазовой задержкой и азимутальным углом. При этом полную матрицу Джонса можно получить перемножением всех матриц, отвечающих этим пластинкам.

Ограничимся рассмотрением случая, когда кручение является линейным и азимутальный угол равен

$$\psi(z) = \alpha z,$$

где z – расстояние в направлении распространения, α – константа кручения.

Пусть Γ – фазовая задержка пластинки при отсутствии кручения. В частном случае при рассмотрении нематического жидкого кристалла, ось c которого параллельна поверхности пластинки,

фазовая задержка Γ дается выражением

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l,$$

где l – толщина слоя жидкого кристалла. Полный угол кручения равен

$$\psi_0 = \psi(l) = \alpha l.$$

Чтобы получить матрицу Джонса для такой структуры, необходимо разделить эту пластинку на N пластинок равной толщины. Каждая пластинка при этом будет иметь фазовую задержку Γ/N . Пластинки ориентированы под азимутальными углами $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots, (N-1)\varphi, N\varphi$, где $\varphi = \psi_0/N$. Полная матрица Джонса для таких N пластинок имеет вид

$$W = \prod_{m=N}^1 R(m\varphi)W_0R(-m\varphi).$$

Заметим, что в приведенном выше матричном произведении член с $m = 1$ возникает с правой стороны. Используя тождество

$$R(\rho_1)R(\rho_2) = R(\rho_1 + \rho_2),$$

эту матрицу можно записать в виде

$$W = R(\psi_0) [W_0R(-\psi_0/N)]^N,$$

где

$$W_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\Gamma/2N} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2N} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$W = R(\psi_0) \begin{bmatrix} \cos \varphi e^{-i\Gamma/2N} & -\sin \varphi e^{-i\Gamma/2N} \\ \sin \varphi e^{i\Gamma/2N} & \cos \varphi e^{i\Gamma/2N} \end{bmatrix}^N = R(\psi_0)M. \quad (4.37)$$

Используем тождество Чебышева

$$M_{11} = (M_{22})^* = \cos \frac{\psi_0}{N} e^{-i\Gamma/2N} \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(N-1)\theta}{\sin \theta},$$

$$M_{12} = -(M_{21})^* = -\sin \frac{\psi_0}{N} e^{-i\Gamma/2N} \frac{\sin N\theta}{\sin \theta},$$

$$\cos \theta = \cos \frac{\psi_0}{N} \cos \frac{\Gamma}{2N}.$$

Эти выражения можно упростить, если осуществить предельный переход $N \rightarrow \infty$. Для этого разложим все косинусы в последнем выражении в ряд Тэйлора

$$\theta^2 = \left[\frac{\psi_0}{N} \right]^2 + \left[\frac{\Gamma}{2N} \right]^2$$

и введем переобозначение

$$F^2 = N^2 \theta^2 = \psi_0^2 + (\Gamma/2)^2.$$

Тогда матрица W примет вид

$$W = R(\psi_0) \begin{bmatrix} \cos F - i \frac{\Gamma}{2} \frac{\sin F}{F} & -\psi_0 \frac{\sin F}{F} \\ \psi_0 \frac{\sin F}{F} & \cos F + i \frac{\Gamma}{2} \frac{\sin F}{F} \end{bmatrix}.$$

Это точное выражение для матрицы Джонса анизотропной пластинки с линейным кручением.

Пусть \mathbf{V} – исходное состояние поляризации. Тогда состояние поляризации \mathbf{V}' после прохождения пластинки можно записать в виде

$$\mathbf{V}' = W\mathbf{V}.$$

§ 8. Адиабатическое отслеживание

Нередко встречается ситуация, особенно в скрученных нематических жидких кристаллах, когда фазовая задержка Γ значительно больше угла кручения ψ_0 . Рассмотрим, например, слой жидкого кристалла толщиной 25 мкм с углом кручения $\pi/2$. Двухлучепреломление жидкого кристалла обычно имеет величину $n_e - n_o = 0.1$. Для длины волны $\lambda = 0.5$ мкм мы имеем $\Gamma/\psi_0 = 20$. Для более толстого слоя это число может быть даже больше. В

предположении $\Gamma \gg \psi_0$ полная матрица Джонса (4.37) принимает вид

$$W = R(\psi_0) \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Если падающий свет линейно поляризован вдоль медленной или быстрой оси пластинки, то в соответствии с (4.38) свет будет оставаться линейно поляризованным вдоль «локальной» медленной или быстрой оси. В этом смысле вектор поляризации отслеживает вращение локальной оси при условии, что вектор поляризации направлен вдоль одной из осей. Действие матрицы Джонса на любой вектор поляризации можно разделить на два этапа. Сначала матрица фазовой задержки действует на вектор Джонса падающей волны, причем для света, линейно поляризованного вдоль одной из главных осей Действие этой матрицы приводит только к фазовому сдвигу светового пучка, а состояние его поляризации сохраняется неизменным. Затем матрица $R(\psi_0)$ поворачивает вектор Джонса на угол ψ_0 . В случае линейно поляризованного света такой поворот приводит к тому, что вектор поляризации оказывается параллельным главной оси на выходной грани пластинки. Таким образом, если падающий пучок света поляризован вдоль направления нормальных мод во входной плоскости ($z = 0$), то вектор поляризации световой волны будет отслеживать вращение главных осей и оставаться параллельным локальной медленной (или быстрой) оси при условии, что коэффициент кручения мал. Это явление называется *адиабатическим отслеживанием* и имеет важные применения при создании световых затворов на жидких кристаллах.

Обсудим случай нематического жидкого кристалла с кручением в четверть оборота ($\psi_0 = \pi/2$). Если слой такого кристалла поместить между двумя параллельными поляризаторами (с горизонтальным пропусканием), оси пропускания которых параллельны оптической оси жидкого кристалла во входной плоскости ($z = 0$), то для волны, прошедшей первый поляризатор, можно

записать следующий вектор Джонса:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица вращения $R(\psi_0)$ в выражении (4.37) запишется в виде

$$R(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда состояние поляризации (вектор Джонса) светового пучка после прохождения им жидкого кристалла дается

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \frac{\pi \sin F}{2} \frac{\Gamma}{F} \\ \cos F - i \frac{\Gamma \sin F}{2} \frac{\Gamma}{F} \end{pmatrix}.$$

Составляющая вдоль оси y не будет пропускаться вторым поляризатором (второй поляризатор отсекает y -составляющую вектора Джонса). Таким образом, коэффициент пропускания всей структуры запишется в виде

$$T = \frac{\sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma}{\pi} \right)^2} \right]}{1 + \left(\frac{\Gamma}{\pi} \right)^2}, \quad (4.39)$$

где мы использовали выражение для F с $\psi_0 = \pi/2$.

Для кристаллических слоев с достаточно большой толщиной фазовая задержка много больше, чем π (т. е. $\Gamma \gg \pi$). При этом из (4.39) следует, что коэффициент пропускания фактически равен нулю. Это есть следствие адиабатического отслеживания, поскольку вектор поляризации отслеживает вращение осей и поворачивается на угол $\psi_0 = \pi/2$, равный углу кручения. Поскольку это направление ортогонально оси пропускания анализатора, коэффициент пропускания равен нулю.

Во многих жидких кристаллах с кручением, прикладывая электрическое поле (или создавая механические напряжения), можно воздействовать на оптическую ось таким образом, чтобы она была

направлена вдоль заданного направления. Приложение электрического поля вдоль направления z будет разрушать такую скрученную структуру. Это приводит к тому, что фазовая задержка Γ становится равной нулю и, согласно (4.39), имеет место полное пропускание света. После отключения электрического поля жидкий кристалл восстанавливает свою структуру с кручением и свет блокируется. В этом состоит основной принцип работы светового затвора на жидких кристаллах.

§ 9. Расчет коэффициента пропускания света неоднородного слоя нематического жидкого кристалла в электрическом поле

Континуальное описание жидких кристаллов. В идеальном монокристалле нематика молекулы в среднем ориентированы вдоль некоторого направления, характеризуемого единичным вектором – директором \mathbf{n} . В реальном образце жидкого кристалла (ЖК) присутствие ограничивающих поверхностей или внешних полей (магнитного, электрического), неколлинеарных директору, приводит к искажению упорядочения и директор становится функцией координат $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Как правило, расстояния L (~ 1 мкм), на которых заметно меняется $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, превышают размер молекул a (~ 20 Å): $L \gg a$ [11], поэтому для описания ориентационных деформаций ЖК может быть использована континуальная теория, которая пренебрегает деталями молекулярной структуры.

В основе континуальной теории жидких кристаллов лежит выражение для плотности свободной энергии искажения поля директора (потенциал Озеена – Франка) [11–13]

$$F_d = \frac{1}{2} [K_{11}(\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + q_0)^2 + K_{33}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n})^2]. \quad (4.40)$$

Здесь q_0 – волновое число спирали в случае холестерика, в остальных случаях $q_0 = 0$.

Константы K_{ii} ($i = 1, 2, 3$) в выражении (4.40) называют модулями ориентационной упругости или константами Франка. Они

характеризуют величину трех основных типов деформации поля директора в ЖК: K_{11} — деформация с $\operatorname{div} \mathbf{n} \neq 0$ — поперечный изгиб (splay); K_{22} — деформация с $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq 0$ — кручение (twist); K_{33} — деформация с $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq 0$ — продольный изгиб (bend). Если в ЖК имеют место деформации, отвечающие чистому поперечному изгибу, кручению или чистому продольному изгибу, то из условия устойчивости однородного состояния (неискаженный нематик) $F_d > 0$ следует, что все постоянные K_{ii} должны быть положительными [11].

Константы Франка имеют размерность силы (дин=эрг/см) и по величине $\sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ дин. Для большинства жидких кристаллов $1/3 < K_{11}/K_{33} < 2$, $4/15 < K_{22}/K_{33} < 1$ [14].

Если поместить ЖК во внешнее поле (магнитное или электрическое), то плотность свободной энергии содержит дополнительные слагаемые³

$$F_m = -\frac{1}{2}\sigma|\chi_a|(\mathbf{n}\mathbf{H})^2, \quad (4.41)$$

$$F_e = -\frac{1}{8\pi}\sigma|\varepsilon_a|(\mathbf{n}\mathbf{E})^2,$$

где \mathbf{H} и \mathbf{E} — напряженности магнитного и электрического полей, $\chi_a = \chi_{||} - \chi_{\perp}$ и $\varepsilon_a = \varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}$ — анизотропии диамагнитной восприимчивости и диэлектрической проницаемости, соответственно. Индексы $||$ и \perp указывают на восприимчивости вдоль и поперек директора \mathbf{n} . В случае $\chi_a > 0$ или $\varepsilon_a > 0$ ($\sigma = 1$) директор \mathbf{n} в неограниченном ЖК стремится ориентироваться вдоль полей \mathbf{H} или \mathbf{E} ; при $\chi_a < 0$ или $\varepsilon_a < 0$ ($\sigma = -1$) директор ортогонален вектору напряженности поля.

Известно, что в состоянии теплового равновесия свободная энергия тела минимальна по отношению ко всем изменениям состояния тела при постоянных температуре и объеме [15]. Поэтому для определения термодинамически устойчивых конфигураций поля директора в ЖК необходимо найти минимум полной

³Формулы приведены для расчетов с параметрами, измеряемыми в единицах СГСЭ.

свободной энергии жидкокристаллического образца

$$\mathcal{F} = \int_V F \left(n_i, \frac{\partial n_i}{\partial r_k} \right) dV, \quad (4.42)$$

которая является функционалом относительно $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Здесь $F = F_d + F_m + F_e$ – плотность свободной энергии ЖК с учетом вкладов (4.40) и (4.41), V – объем образца.

Минимизация свободной энергии (4.42) при условии $\mathbf{n}^2(\mathbf{r}) = 1$ дает систему уравнений, позволяющую найти вектор \mathbf{n}

$$-\frac{\partial F}{\partial n_i} + \frac{\partial}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial n_i}{\partial r_k}} = \lambda(\mathbf{r})n_i, \quad \forall \mathbf{r} \in V, \quad (4.43)$$

где $\lambda(\mathbf{r})$ – множитель Лагранжа, который определяется из условия $\mathbf{n}^2(\mathbf{r}) = 1$ [16].

В простейшем случае плоской поверхности при жестких условиях сцепления уравнение (4.43) решают совместно с граничными условиями

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_0(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma, \quad (4.44)$$

где $\mathbf{n}_0(\mathbf{r})$ – заданное значение директора на границе области, Σ – поверхность, ограничивающая объем V . В случае жесткого сцепления значение $\mathbf{n}_0(\mathbf{r})$ не зависит от распределения $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в объеме ЖК и внешних воздействий. Таким образом, для жесткого сцепления ориентация директора на поверхности может быть просто учтена с помощью граничных условий (4.44) для дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа (4.43) [16].

Ориентация директора нематического ЖК в электрическом поле. Для исследования электрооптических эффектов используются ячейки типа сэндвич (рис. 4.11). Плоский капилляр толщиной от 5 до 100 мкм образован двумя стеклянными пластинами с прозрачными электродами. Зазор фиксирован с помощью изолирующих прокладок. В данной конструкции свет проходит вдоль направления электрического поля.

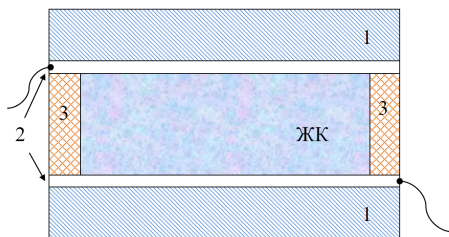


Рис. 4.11. Ячейка типа сэндвич: 1 – стеклянные подложки, 2 – прозрачные электроды, 3 – диэлектрические прокладки, ЖК – жидкий кристалл

Рассмотрим случай незакрученного слоя ЖК толщиной L . Тогда ориентация директора будет определяться только одним углом наклона молекул ЖК ϑ к ограничивающей поверхности ячейки. Назовем этот угол полярным углом ориентации директора ЖК, который будет зависеть только от одной пространственной координаты z декартовой системы координат, выбранной таким образом, что ось x совпадает с ориентацией молекул ЖК на первой и второй поверхностях ячейки, а ось z перпендикулярна им и направлена вверх (рис. 4.12). В плоскости xy упорядочение молекул ЖК считаем однородным, т.е. $\mathbf{n} = (\cos \vartheta(z), 0, \sin \vartheta(z))$. В указанной геометрии внешнее электрическое поле направлено перпендикулярно границам слоя, т.е. вдоль оси z : $\mathbf{E} = (0, 0, E)$, а граничные условия имеют вид $\vartheta(0) = \vartheta_0, \vartheta(L) = \vartheta_L, \vartheta_0 = \vartheta_L$.

Таким образом, задача отвечает исследованию так называемого *splay*-эффекта (или S-эффекта). В случае достаточно сильного поля и большой диэлектрической анизотропии ЖК напряженность электрического поля неоднородна, в то время как индукция остается постоянной по всей толщине ЖК слоя.

Найдем вклады в плотность свободной энергии ЖК с учетом геометрии задачи:

$$F = \frac{1}{2} [K_{11} \cos^2 \vartheta + K_{33} \sin^2 \vartheta] (\vartheta')^2 - \frac{1}{8\pi} \varepsilon_a E^2 \sin^2 \vartheta.$$

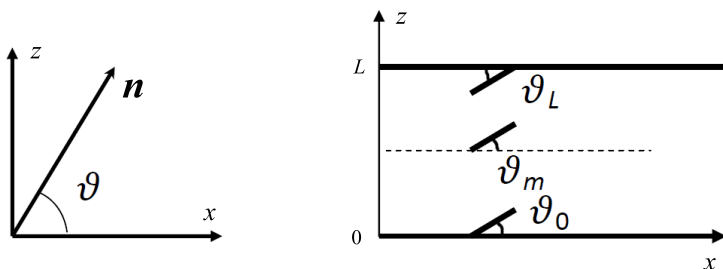


Рис. 4.12. Ориентация директора НЖК, задаваемая полярным углом ϑ

Здесь $\vartheta' = d\vartheta/dz$ – производная функции $\vartheta(z)$ по координате z .

В качестве единицы длины выберем толщину ячейки L , тогда $\tilde{z} = z/L$ будет безразмерной координатой, и ее значения будут лежать в промежутке $[0; 1]$. С учетом обезразмеривания координаты плотность свободной энергии ЖК примет вид

$$F = \frac{K_{33}}{L^2} \left\{ \frac{1}{2} [k \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta] (\vartheta')^2 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \vartheta \right\}. \quad (4.45)$$

Здесь и далее $\vartheta' = d\vartheta/d\tilde{z}$, $k = K_{11}/K_{33}$ – отношение констант Франка, $e = LE\sqrt{\varepsilon_a}/(4\pi K_{33})$ – безразмерная напряженность электрического поля.

Условие минимума свободной энергии в выбранной системе координат и при заданных выше условиях дается уравнением Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{dF}{d\vartheta} - \frac{d}{d\tilde{z}} \frac{\partial F}{\partial (d\vartheta/d\tilde{z})} = 0. \quad (4.46)$$

Подставляя (4.45) в выражение (4.46), получим

$$(k \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \vartheta'' + \frac{1}{2}(1 - k) \sin 2\vartheta (\vartheta')^2 + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\vartheta = 0. \quad (4.47)$$

Дифференциальное уравнение (4.47) после интегрирования имеет

вид

$$\frac{d\vartheta}{d\tilde{z}} = \pm \sqrt{\frac{C - e^2 \sin^2 \vartheta}{k \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}}, \quad (4.48)$$

где C – константа интегрирования, а знак плюс отвечает $0 \leq \tilde{z} \leq 1/2$, знак минус – $1/2 \leq \tilde{z} \leq 1$. Константа интегрирования C находится из условия $\vartheta'|_{\tilde{z}=1/2} = 0$, выражающего симметрию распределения молекул ЖК относительно середины слоя. Введем для обозначения максимального отклонения директора в середине слоя угол $\vartheta_m = \vartheta(1/2)$. В результате уравнение (4.48) можно записать в интегральном виде

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(\tilde{z})} \sqrt{\frac{k \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}{e^2 (\sin^2 \vartheta_m - \sin^2 \vartheta)}} d\vartheta = \tilde{z}. \quad (4.49)$$

Интегрируя уравнение (4.48) по интервалу $0 \leq \tilde{z} \leq 1/2$, получим уравнение для определения угла ϑ_m :

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_m} \sqrt{\frac{k \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}{e^2 (\sin^2 \vartheta_m - \sin^2 \vartheta)}} d\vartheta = 1/2. \quad (4.50)$$

Система интегральных уравнений (4.49) и (4.50) позволяет найти распределение поля директора между границами слоя во внешнем однородном электрическом поле.

Метод расчета оптических характеристик ЖК устройств отображения информации. Далее рассмотрим, как можно применить матричный метод Джонса для теоретического исследования оптических характеристик устройств на основе нематических ЖК.

В матричном формализме Джонса ЖК-ячейка характеризуется некоторой комплексной матрицей 2×2 M_{LCD} , которая имеет вид [17]

$$M_{LCD} = \prod_{i=n}^1 M_i,$$

где M_i – матрица Джонса i -го оптического элемента ЖК-ячейки; n – количество элементов. На рис. 4.13 представлена геометрия

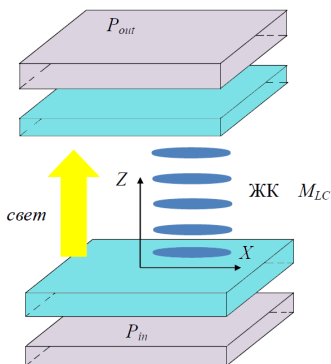


Рис. 4.13. ЖК-ячейка между двумя поляризаторами

ЖК-ячейки. Матрица Джонса для всей ЖК-ячейки

$$M_{LCD} = R(-\chi_{out})P_{out}R(\chi_{out})M_{LC}R(-\chi_{in})P_{in}R(\chi_{in}),$$

где P_{in} , P_{out} – матрицы Джонса для входного выходного поляризаторов соответственно; $R(\chi)$ – матрицы поворота на угол χ ; χ_{in} – угол ориентации входного поляризатора относительно системы координат XYZ ; χ_{out} – угол ориентации выходного поляризатора относительно системы координат XYZ ;

$$P_{in,out} = \begin{pmatrix} t_{1in,out} & 0 \\ 0 & t_{2in,out} \end{pmatrix}, \quad R(\chi) = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ -\sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix},$$

$t_{1in,out}$ – максимальный коэффициент пропускания для входного или выходного поляризатора соответственно; $t_{2in,out}$ – минимальный коэффициент пропускания для входного или выходного поляризатора соответственно.

Основная трудность в вычислении M_{LCD} связана с нахождением матрицы Джонса слоя ЖК M_{LC} .

Для определения этой матрицы предположим, что в слое ЖК отсутствует многолучевая интерференция, а поглощение в рабочем веществе ЖК-ячейки слабое. Для вычисления M_{LC} разобьем

неоднородный слой НЖК на гомогенные субслои, в каждом из которых ориентация директора ЖК одинакова. Алгоритм нахождения ориентации директора ЖК рассматривали выше.

Считая, что ЖК является положительным одноосным кристаллом и оси эллипсоида поглощения совпадают с осями эллипсоида показателей преломления, предположим, что:

- 1) в однородном слое ЖК распространяются обыкновенная и необыкновенная волны в одном направлении, но для них различны показатели преломления и коэффициенты поглощения;
- 2) поляризации необыкновенной и обыкновенной волн ортогональны друг другу;
- 3) в прямоугольной системе координат XYZ такой, что направление распространения волны совпадает с осью Z , а ось X совпадает с направлением ориентации молекул ЖК на первой подложке, матрицу ЖК M_{LC} можно записать в виде [17]

$$M_{LC} = G_{NXYZ} \rho_{N-2, N-1} \dots \rho_{K, K+1} G_{KXYZ} \dots \rho_{1,2} G_{1XYZ},$$

где G_{KXYZ} – матрица Джонса K -го однородного слоя ЖК; $\rho_{K, K+1}$ – матрица, учитывающая различие в направлениях распространения света и показателей преломления в K и $(K + 1)$ -м однородных субслоях; N – число однородных субслоев.

При большом числе субслоев ЖК ($N \geq 100$) и при нормальном падении света на ЖК-ячейку можно считать матрицы $\rho_{K, K+1}$ единичными. Тогда матрицу M_{LC} можно записать следующим образом:

$$M_{LC} = \prod_{K=N}^1 G_{KXYZ}.$$

Таким образом, нахождение матрицы M_{LC} сводится к отысканию вида матрицы G_{KXYZ} .

Матрицу G_{KXYZ} с учетом сделанных приближений для однородного слоя НЖК можно записать в виде

$$G_{KXYZ} = \begin{pmatrix} \exp \left\{ -i \frac{2\pi L}{\lambda N} n_K \right\} & 0 \\ 0 & \exp \left\{ -i \frac{2\pi L}{\lambda N} n_o \right\} \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{n_K^2} = \frac{\cos^2 \vartheta_K}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \vartheta_K}{n_o^2},$$

где n_K – показатель преломления для необыкновенной волны в K -м однородном слое НЖК, n_e , n_o – главные показатели преломления для НЖК; ϑ_K – угол ориентации директора ЖК в K -м однородном слое; λ – длина волны падающего на ЖК-ячейку света.

Оптические характеристики электрооптического эффекта двойного лучепреломления в ЖК, управляемого электрическим полем, определяются в этом случае по выходной матрице когерентности J^{out} :

$$J^{out} = M_{LCD} J^{in} M_{LCD}^\dagger,$$

где J^{in} – матрица когерентности для света⁴, падающего на ЖК-ячейку; M_{LCD}^\dagger – матрица, эрмитово сопряженная к M_{LCD} .

Примеры матриц когерентности:

Естественный свет

$$J^{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейно поляризованный по X :

$$J^{in} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае коэффициент пропускания ЖК-ячейки определяется следующим образом:

$$T = \frac{J_{11}^{out} + J_{22}^{out}}{J_{11}^{in} + J_{22}^{in}}.$$

⁴Матрица когерентности – это еще один способ задания состояния поляризации света. Определение матрицы когерентности будет дано позже. Здесь же ограничимся их видом для некоторых примеров.

Степень поляризации \mathfrak{P} и характеристики эллипса поляризации (азимут α и эллиптичность θ) для света, вышедшего из ЖК-ячейки, соответственно равны:

$$\mathfrak{P} = \sqrt{1 - 4 \frac{J_{11}^{out} J_{22}^{out} - J_{12}^{out} J_{21}^{out}}{(J_{11}^{out} + J_{22}^{out})^2}},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{J_{12}^{out} + J_{21}^{out}}{J_{11}^{out} - J_{22}^{out}},$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{i(J_{21}^{out} - J_{12}^{out})}{(J_{11}^{out} + J_{22}^{out})\Delta}.$$

Таким образом, используя матрицу когерентности, преобразуемую с помощью соответствующих комплексных матриц Джонса, можно простым и эффективным способом теоретически исследовать характеристики электрооптических эффектов в ЖК-ячейках.

§ 10. Экспериментальное определение элементов вектора и матрицы Джонса

Рассмотрим методы измерения вектора Джонса для любого пучка света, поляризованного либо линейно, либо эллиптически, и методы, с помощью которых можно найти экспериментально матрицу Джонса произвольного прибора. Эти методы характеризуются тем, что пучки света пропускают через прибор, различные поляроиды и фазовые пластинки, а затем измеряют интенсивность пучка на выходе каждого элемента системы [4].

Экспериментальное определение элементов вектора Джонса. Предположим, что вектор Джонса определяется выражением

$$\begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, интенсивность равна

$$I = \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = H^2 + K^2.$$

Единицу измерения интенсивности выберем таким образом, чтобы исследуемый пучок света имел единичную интенсивность.

Сначала пропустим пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна, т. е. параллельна оси x . Вектор Джонса для пучка на выходе поляризатора равен

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, измеряемая интенсивность прошедшего светового пучка $I_1 = H^2$ и соответственно $H = \sqrt{I_1}$.

Теперь пропустим исходный пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна (параллельна оси y); при этом вектор Джонса принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что интенсивность $I_2 = K^2$, т. е. $K = \sqrt{I_2}$.

Затем пусть пучок проходит через поляризатор, плоскость пропускания которого составляет угол 45° с осью x и располагается в первом и третьем квадрантах. Для такого поляризатора матрица Джонса записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор Джонса становится равным

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H + Ke^{i\delta} \\ H + Ke^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Умножая комплексно сопряженный транспонированный вектор Джонса на исходный вектор, находим интенсивность

$$I_3 = \frac{1}{2}[H^2 + HK(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + K^2].$$

Далее пропустим луч через поляризатор, плоскость пропускания которого образует угол 45° с осью x , но располагается во

втором и четвертом квадрантах. При этом вектор Джонса запишется в виде

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H - Ke^{i\delta} \\ -H + Ke^{i\delta} \end{pmatrix},$$

и интенсивность равна

$$I_4 = \frac{1}{2}[H^2 - HK(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + K^2].$$

Следовательно,

$$I_3 - I_4 = HK(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) = 2HK \cos \delta.$$

Поскольку H и K уже известны, из этого уравнения получаем значение $\cos \delta$. Однако δ все еще может быть и положительным, и отрицательным. Таким образом, существует неопределенность в знаке разности фаз. Для того чтобы разрешить эту неопределенность, найдем $\sin \delta$.

Пропустим теперь исходный пучок через четвертьволновую пластинку, быстрая ось которой горизонтальна. Учитывая для четвертьволновой пластинки ($\delta = 90^\circ$) и что $\varphi = 0$ (см. табл. 4.1) матрицу Джонса

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

соответствующий вектор Джонса определяем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ -iKe^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Пусть затем пучок после четвертьволновой пластинки проходит через поляризатор, плоскость пропускания которого образует угол 45° с осью x . При этом вектор Джонса определяется выражением

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ -iKe^{i\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H - iKe^{i\delta} \\ H - iKe^{i\delta} \end{pmatrix},$$

а интенсивность пучка на выходе равна

$$I_5 = \frac{1}{2}[H^2 - iHK(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) + K^2] = \frac{1}{2}[H^2 - 2HK \sin \delta + K^2].$$

Далее пропустим пучок, прошедший четвертьволновую пластинку, через поляризатор, плоскость пропускания которого образует угол -45° с осью x . Для вектора Джонса тогда имеем

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ -iKe^{i\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H + iKe^{i\delta} \\ -H - iKe^{i\delta} \end{pmatrix},$$

а интенсивности находим

$$I_6 = \frac{1}{2}[H^2 - iHK(e^{-i\delta} - e^{i\delta}) + K^2] = \frac{1}{2}[H^2 + 2HK \sin \delta + K^2].$$

Следовательно,

$$I_6 - I_5 = 2HK \sin \delta.$$

Таким образом, мы нашли величину, которая определяет $\sin \delta$. Записывая условие $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$, находим значение δ . Теперь мы полностью определили вектор Джонса для исходного пучка.

При проведении описанных выше измерений необходимо учитывать то, что поляризатор никогда не бывает идеальным, т. е. никогда не пропускает весь свет даже в том случае, когда луч поляризован в плоскости пропускания поляризатора. Если, например, использовать поляроид марки HN32, то ток фотоэлемента, полученный при измерении величин I_1, I_2, \dots, I_6 , будет приблизительно на 64% меньше, чем соответствующие теоретические значения для идеального поляризатора. Точное значение потерь для данного поляризатора должно быть определено непосредственно в процессе измерений путем пропускания через него неполяризованного света и измерения прошедшей интенсивности по крайней мере для двух ориентаций плоскости пропускания поляризатора.

Экспериментальное определение элементов матрицы Джонса. Опишем метод, с помощью которого можно найти матрицу

Джонса произвольного прибора посредством измерений интенсивности. Предположим, что матрицу Джонса можно записать в виде (представление в декартовых и полярных координатах)

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} + iY_{11} & X_{12} + iY_{12} \\ X_{21} + iY_{21} & X_{22} + iY_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} R_{11}e^{i\theta_{11}} & R_{12}e^{i\theta_{12}} \\ R_{21}e^{i\theta_{21}} & R_{22}e^{i\theta_{22}} \end{pmatrix}.$$

1. Пропустим через прибор линейно-поляризованный пучок света единичной интенсивности, плоскость поляризации которого параллельна оси x . Следовательно, вектор Джонса этого входного пучка записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После прохождения пучка через прибор его вектор Джонса принимает вид

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix}.$$

1.1. Пропуская затем пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна, получаем вектор Джонса

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом интенсивность пучка на выходе дается выражением

$$I_2 = J_{11}^* J_{11} = (X_{11} - iY_{11})(X_{11} + iY_{11}) = X_{11}^2 + Y_{11}^2 = R_{11}^2.$$

1.2. Пучок, прошедший через прибор, пропустим теперь через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна. При этом вектор Джонса принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{21} \end{pmatrix},$$

а интенсивность $I_3 = R_{21}^2$.

2. На прибор падает пучок линейно-поляризованного света единичной интенсивности, плоскость поляризации которого параллельна оси y , а вектор Джонса равен

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На выходе этого прибора пучку соответствует вектор Джонса

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{pmatrix}.$$

2.1. Пучок, вышедший из прибора, падает затем на поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна; при этом вектор Джонса для выходного пучка дается выражением

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность $I_4 = R_{12}^2$.

2.2. Теперь пучок, вышедший из прибора, пропустим через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна, и получим соответствующий вектор Джонса для выходного пучка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{22} \end{pmatrix}.$$

Интенсивность $I_5 = R_{22}^2$.

Таким образом, мы нашли все четыре элемента матрицы Джонса. Осталось лишь найти фазовые углы для этих матричных элементов.

3. Пропустим теперь через прибор пучок света единичной интенсивности с правой круговой поляризацией; при этом имеем

$$H = K \text{ и } H^2 + K^2 = 1,$$

откуда

$$H = K = 1/\sqrt{2}.$$

Для света с правой круговой поляризацией $\delta = \pi/2$, так что $e^{i\delta} = i$. Следовательно, вектор Джонса для входного пучка равен

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

На выходе из прибора пучок описывается вектором Джонса следующего вида:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{12} \\ J_{21} + iJ_{22} \end{pmatrix}.$$

3.1. Затем пропустим пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна, так что вектор Джонса определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{12} \\ J_{21} + iJ_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (X_{11} + iY_{11}) + i(X_{12} + iY_{12}) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (X_{11} - Y_{12}) + i(Y_{11} + X_{12}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Интенсивность пучка на выходе поляризатора получим путем, умножения этой матрицы на комплексно сопряженную ей транспонированную матрицу. Таким образом,

$$I_6 = \frac{1}{2} ((X_{11} - Y_{12})^2 + (Y_{11} + X_{12})^2).$$

Подставляя известные значения I_2 и I_4 , получаем

$$\frac{2I_6 - I_2 - I_4}{\sqrt{I_2 I_4}} = \frac{2(Y_{11} X_{12} - X_{11} Y_{12})}{R_{11} R_{12}} = 2 \sin(\theta_{11} - \theta_{12}).$$

Здесь мы использовали соотношения между декартовой и полярной формами записи элементов матрицы Джонса.

3.2. А теперь пучок с выхода прибора пропустим через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна. Тогда для вектора Джонса имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{12} \\ J_{21} + iJ_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ J_{21} + iJ_{22} \end{pmatrix}.$$

Для интенсивности получаем

$$I_7 = \frac{1}{2} ((X_{21} - Y_{22})^2 + (Y_{21} + X_{22})^2).$$

Следовательно,

$$\frac{2I_7 - I_3 - I_5}{\sqrt{I_3 I_5}} = 2 \sin(\theta_{21} - \theta_{22}).$$

Теперь мы знаем $\sin(\theta_{11} - \theta_{12})$ и $\sin(\theta_{21} - \theta_{22})$, однако все же остается некоторая неопределенность, поскольку $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$. Для полного определения углов нам нужно знать также косинусы этих углов.

4. Пропустим через прибор пучок линейно-поляризованного света единичной интенсивности, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с осью x . Для этого пучка $H = K = 1/\sqrt{2}$ и $\delta = 0$, так что $e^{i\delta} = 1$, а его вектор Джонса равен

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После прохождения пучка через прибор его вектор Джонса принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{12} \\ J_{21} + J_{22} \end{pmatrix}.$$

4.1. Пусть пучок света проходит затем через поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна. Вектор Джонса выходного пучка определяется выражением

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{12} \\ J_{21} + J_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность

$$I_8 = \frac{1}{2}[(X_{11} + X_{12})^2 + (Y_{11} + Y_{12})^2].$$

Используя преобразования, аналогичные приведенным выше, находим

$$\frac{2I_8 - I_2 - I_4}{\sqrt{I_2 I_4}} = 2 \cos(\theta_{11} - \theta_{12}).$$

4.2. Пропустим теперь луч, вышедший из прибора, через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна. Тогда для вектора Джонса имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{12} \\ J_{21} + J_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ J_{21} + J_{22} \end{pmatrix},$$

а для интенсивности

$$I_9 = \frac{1}{2}[(X_{21} - X_{22})^2 + (Y_{21} + Y_{22})^2]$$

и

$$\frac{2I_9 - I_3 - I_5}{\sqrt{I_3 I_5}} = 2 \cos(\theta_{22} - \theta_{12}).$$

Теперь мы знаем полностью углы $(\theta_{11} - \theta_{12})$ и $(\theta_{22} - \theta_{12})$. (Следует проверить результаты измерений, используя тот факт, что сумма квадратов синусов и косинусов, полученных в процессе измерений, должна приблизительно быть равна единице.) Для того чтобы завершить нашу работу, нужно установить связь между этими углами, т. е. нам необходимо получить соотношение, связывающее угол θ_{11} либо с θ_{21} , либо с θ_{22} . Это можно сделать, если пропустить через прибор пучок света, линейно-поляризованного в горизонтальной плоскости, так что (см. п. 1) вектор Джонса на выходе этого прибора запишется в виде

$$\begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix}.$$

Затем пропустим этот пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого ориентирована под углом 45° к оси x . Тогда для вектора Джонса имеем

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{21} \\ J_{11} + J_{21} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь пучок света с выхода прибора падает на другой поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна. В этом случае вектор Джонса принимает вид

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{21} \\ J_{11} + J_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_{11} + J_{21} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как и в п. 4.1 или 4.2, для интенсивности получаем

$$I_{10} = \frac{1}{4} [(X_{11} + X_{21})^2 + (Y_{11} + Y_{21})^2],$$

так что

$$\frac{4I_{10} - I_2 - I_3}{\sqrt{I_2 I_3}} = 2 \cos(\theta_{11} - \theta_{21}).$$

Пропустим теперь пучок с выхода прибора, вектор Джонса которого равен

$$\begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix},$$

через четвертьволновую пластинку с быстрой осью, расположенной вертикально. На выходе этой пластинки пучок имеет следующий вектор Джонса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ iJ_{21} \end{pmatrix}.$$

Затем с выхода пластинки направим пучок на поляризатор, плоскость пропускания которого ориентирована под углом 45° к оси x . Для вектора Джонса тогда получаем

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ iJ_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{21} \\ J_{11} + iJ_{21} \end{pmatrix},$$

а для пучка, прошедшего через поляризатор, плоскость пропускания которого горизонтальна, вектор Джонса принимает вид

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{21} \\ J_{11} + iJ_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_{11} + iJ_{21} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 3.1 и 3.2, для интенсивности имеем

$$I_{11} = \frac{1}{4} [(X_{11} - Y_{21})^2 + (Y_{11} + X_{21})^2],$$

так что

$$\frac{4I_{11} - I_2 - I_3}{\sqrt{I_2 I_3}} = 2 \sin(\theta_{11} - \theta_{21}).$$

Угол $(\theta_{11} - \theta_{21})$, таким образом, определен однозначно, и, следовательно, известна разность между θ_{11} и тремя остальными углами.

Значение одного из углов θ_s может быть произвольным, т. е. можно положить, например, $\theta_{11} = 0$. Это означает, что остальные три угла, соответствующие элементам матрицы Джонса, известны; таким образом, мы определили всю матрицу.

Глава 5

Метод матриц Мюллера и векторов Стокса для расчета оптических систем

§ 1. Поляризация квазимонохроматических волн

До этого момента мы рассматривали поляризацию монохроматических волн. Мы обнаружили, что поляризация монохроматической волны в общем случае является эллиптической, т. е. конец вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} , наблюдаемого в фиксированной точке пространства, регулярно повторяющимся образом описывает эллипс, который может превращаться в окружность или прямую линию в предельных случаях. Поляризация такого типа называется *полной* [18].

В случае квазимонохроматической волны характер колебаний электрического вектора \mathbf{E} становится более сложным. Поскольку спектр квазимонохроматической волны состоит не из одной дискретной частоты, а из набора частот, временные изменения декартовой компоненты электрического вектора не могут описываться строго синусоидальной волной бесконечной длины. Обозначим через $\Delta\omega$ ширину полосы частот квазимонохроматической волны, а через ω_0 – ее центральную частоту. Можно считать, что такой спектр эквивалентен спектру синусоидальной волны с несущей частотой ω_0 и модулированными амплитудой и фазой. Для квазимонохроматической волны с произвольной пространственной структурой электрический вектор \mathbf{E} в фиксированной точке пространства можно разложить на три декартовы компоненты:

$$E_j = \tilde{E}_j(t) \cos[\omega_0 t + \delta_j(t)], \quad j = x, y, z. \quad (5.1)$$

В выражении (5.1) амплитуды $\tilde{E}_j(t)$ и фазы $\delta_j(t)$ являются функциями времени, которые в общем случае независимы для трех декартовых компонент. Шесть функций $[\tilde{E}_j(t), \delta_j(t)]$,

$j = x, y, z$ имеют свойства, подобные свойствам шума, и определяются источником квазимонохроматического излучения. Ширина их частотной полосы имеет порядок $\Delta\omega/2$. В монохроматической волне $\tilde{E}_j(t)$ и $\delta_j(t)$ являются константами, не зависящими от времени.

Если из фиксированной точки наблюдения провести результирующий вектор, равный сумме трех компонент вида (5.1), то конец такого вектора будет описывать сложную траекторию. Чтобы представить эту траекторию, рассмотрим изменение вектора \mathbf{E} в течение интервала времени $\tau = 4\pi/\Delta\omega$. Разделим интервал времени τ на большое число N равных подынтервалов $\Delta\tau = \tau/N$. Число N выбрано так, что $\tilde{E}_j(t)$ и $\delta_j(t)$ остаются практически постоянными в течение подынтервала $\Delta\tau$. Поскольку $\Delta\omega \ll \omega_0$, каждый подынтервал $\Delta\tau$ содержит большое число периодов регулярной синусоидальной волны с частотой ω_0 ¹. Внутри подынтервала $\Delta\tau$ применимы свойства поляризации монохроматических волн, и электрический вектор в течение подынтервала $\Delta\tau$ регулярно описывает эллипс. В общем случае поляризационные эллипсы, которые соответствуют N различным подынтервалам, имеют различные свойства. Наблюдаемая в течение полного интервала $\tau = N\Delta\tau$ единичная нормаль \mathbf{n} к плоскости эллипса может прецессировать в пространстве; ориентация эллипса в его плоскости, его форма и размер также могут непрерывно изменяться во времени. Следовательно, хотя поляризация на коротком промежутке времени является эллиптической, на длительном промежутке времени она характеризуется нерегулярной траекторией.

Более прост случай плоской ТЕ волны, так как единичная нормаль \mathbf{n} в этом случае не изменяется (она остается ориентированной в направлении распространения) и электрический вектор \mathbf{E} строго перпендикулярен \mathbf{n} . Следовательно, нам необходимо рас-

¹Если принять, что $\Delta\omega/\omega_0 = 10^{-6}$ (такое значение легко достижимо для лазерных источников), и предположить, что ω_0 лежит в видимой области спектра ($5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$), то, как нетрудно убедиться, при $N = 10^3$ подынтервал $\Delta\tau$ содержит около тысячи периодов колебаний оптической частоты.

смотреть сложение только двух компонент поля (5.1), а именно E_x и E_y , тогда как $E_z = 0$. В результате такого сложения получается эллипс, у которого азимут, эллиптичность (включая направление обхода) и размер непрерывно изменяются во времени при большой продолжительности наблюдения ($\geq \tau$). Если не существует какой-либо преимущественной кратковременной эллиптической поляризации, то свет называется *естественным* или *неполяризованным*.

Как мы уже рассмотрели, при наличии преимущественной конкретной кратковременной эллиптической поляризации свет в общем случае является *частично поляризованным*. В зависимости от характера преимущественной поляризации квазимонохроматическая волна может быть эллиптически, циркулярно или линейно частично поляризованной.

Существование какой-либо конкретной преимущественной поляризации поперечной плоской волны зависит от *степени корреляции* между временными изменениями декартовых компонент E_x и E_y поперечного электрического поля, заданных выражениями (5.1). Случай естественного (неполяризованного) света соответствует полному отсутствию корреляции (*когерентности*) между E_x и E_y . Частичная корреляция приводит к частичной поляризации; полная корреляция дает полную поляризацию.

Во всех экспериментах, в которых имеет место взаимодействие поляризованного света с оптическими приборами, монохроматическая волна и полностью поляризованная квазимонохроматическая волна неразличимы друг от друга [18]².

Отметим, что метод Джонса применим только для когерентного излучения и неполяризующих систем. В случае частично когерентного излучения и деполаризующих систем используют аппарат матриц Мюллера. Деполаризующие оптические системы способны уменьшать степень поляризации падающего на объект света. Как правило, деполаризующие оптические системы – это оптические системы, существующие в природе, например,

²Поэтому мы имеем полное право считать монохроматической волну, которая на самом деле является квазимонохроматической, но полностью поляризованной.

биоткани, но в технике тоже они используются. В этом случае используют формализм векторов Стокса и матриц Мюллера. В этом матричном формализме состояние световой волны, т. е. ее поляризация и интенсивность, описываются вектором Стокса, а оптическая система представляется в виде матрицы Мюллера. Ниже приводится краткое описание этого матричного формализма. Заметим, что в большом количестве задач кристаллооптики измеряемые задержки малы по сравнению с длиной когерентности, что позволяет использовать более простой метод матриц Джонса.

Различные возможные состояния поляризации квазимонохроматической (или монохроматической) плоской ТЕ световой можно представить набором четырех действительных величин называемых параметрами Стокса, каждая из которых имеет размерность интенсивности, т.е. может быть измерена экспериментально. Четыре параметра Стокса обычно обозначают S_0 , S_1 , S_2 , S_3 и определяют через декартовы компоненты поперечного электрического электрического поля [18]:

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle + \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle, \\ S_1 &= \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle - \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle, \\ S_2 &= 2 \langle \tilde{E}_x(t) \tilde{E}_y(t) \cos[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle, \\ S_3 &= 2 \langle \tilde{E}_x(t) \tilde{E}_y(t) \sin[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В выражениях (5.2) символ $\langle v \rangle$ означает усредненное во времени значение v

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v dt,$$

где T – интервал времени, достаточно большой, чтобы интеграл по времени не зависел от выбора T .

Из (5.2) видно, что параметр S_0 представляет собой полную интенсивность световой волны и, следовательно, всегда положителен, а параметр S_1 равен разности интенсивностей x и y компонент и может быть либо положительным, либо отрицательным,

либо равным нулю в зависимости от соотношения между линейными x и y поляризациями.

Если умножить слева вектор Джонса квазимонохроматической волны

$$\mathbf{E}_{x,y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(t)e^{i\delta_x(t)} \\ \tilde{E}_y(t)e^{i\delta_y(t)} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

на матрицу поворота $R(-\pi/4)$, то получим вектор Джонса, компоненты которого ориентированы вдоль биссектрис $-\pi/4$ и $\pi/4$ системы координат x , y , связанной с фронтом волны

$$\mathbf{E}_{x,y}(t) = \begin{pmatrix} E_{-\pi/4} \\ E_{\pi/4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_x - E_y \\ E_x + E_y \end{pmatrix}.$$

Величины E_x , E_y , $E_{\pi/4}$, $E_{-\pi/4}$ здесь следует рассматривать как зависящие от времени фазовые компоненты соответствующих векторов Джонса, например, $E_x = \tilde{E}_x(t)e^{i\delta_x(t)}$. Разность интенсивностей компонент волны, поляризованных вдоль биссектрис $\pi/4$ и $-\pi/4$, определяется соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle (E_x + E_y)(E_x + E_y)^* \rangle - \frac{1}{2} \langle (E_x - E_y)(E_x - E_y)^* \rangle = \\ & = 2 \langle \text{Re}(E_x^* E_y) \rangle = 2 \left\langle \tilde{E}_x(t) \tilde{E}_y(t) \cos[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \right\rangle = S_2. \end{aligned}$$

Это соотношение показывает, что параметр Стокса S_2 отражает преобладание в волне компоненты, линейно поляризованного либо в направлении $\pi/4$, либо в направлении $-\pi/4$. Если $S_2 > 0$ (или $S_2 < 0$), то волна имеет преимущественную линейную поляризацию в направлении $\pi/4$ ($-\pi/4$). Если параметр $S_2 = 0$, то в волне не преобладает ни одна из этих двух поляризаций.

Если умножить вектор Джонса квазимонохроматической волны

$$\mathbf{E}_{x,y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(t)e^{i\delta_x(t)} \\ \tilde{E}_y(t)e^{i\delta_y(t)} \end{pmatrix}$$

на обратную матрицу правоциркулярного поляризатора

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

то получим

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_x + iE_y \\ E_x - iE_y \end{pmatrix}.$$

Это соотношение определяет круговой вектор Джонса волны в представлении, базисными состояниями которого являются левая и правая круговая поляризации. Используем его и найдем разность интенсивностей компонент квазимонохроматической волны, поляризованных по правому и левому кругу.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle (E_x - iE_y)(E_x - iE_y)^* \rangle - \frac{1}{2} \langle (E_x + iE_y)(E_x + iE_y)^* \rangle = \\ & = 2 \langle \text{Re}(-iE_x^* E_y) \rangle = 2 \langle \tilde{E}_x(t) \tilde{E}_y(t) \sin[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle = S_3. \end{aligned}$$

Это соотношение показывает, что параметр Стокса S_3 характеризует преобладание в волне либо право-, либо левоциркулярно поляризованной компоненты (на которые волна может быть разложена). Параметр $S_3 > 0$ ($S_3 < 0$) или равен нулю при преобладании правой (левой) циркулярной поляризации или при их равенстве.

Проведенное выше обсуждение физического смысла параметров Стокса позволяет предложить простой эксперимент, с помощью которого эти параметры могут быть измерены для данной волны. Обозначим через I_0 полную интенсивность волны, а через I_x , I_y , $I_{\pi/4}$, $I_{-\pi/4}$, I_1 и I_2 — интенсивности волны, прошедшей через идеальный поляризатор, расположенный на пути этой волны и пропускающий соответственно x , y , $\pi/4$, $-\pi/4$ линейные поляризации, а так же лево- и правоциркулярно поляризованный свет. Параметры Стокса легко выразить через значения этих интенсивностей

$$\begin{aligned} S_0 = I_0 &= (I_x + I_y) = (I_{\pi/4} + I_{-\pi/4}) = I_1 + I_2, \\ S_1 &= I_x - I_y, \\ S_2 &= I_{\pi/4} - I_{-\pi/4}, \\ S_3 &= I_2 - I_1. \end{aligned}$$

§ 2. Вектор Стокса

Параметры Стокса квазимонохроматической волны можно сгруппировать в 4×1 вектор-столбец:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix},$$

называемый вектором Стокса световой волны. Основное преимущество этого шага состоит в том, что он позволяет использовать компактный матричный формализм при рассмотрении взаимодействия между световой волной и оптическими элементами, составляющими оптическую систему. Для экономии места 4×1 вектор-столбец Стокса часто записывают горизонтально в фигурных скобках, а его элементы разделяют запятой:

$$\mathbf{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}.$$

Неполяризованный свет не обладает какой-либо преимущественной поляризацией, поэтому

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0,$$

и вектор Стокса принимает простой вид:

$$\mathbf{S}_{\text{непол}} = \{S_0, 0, 0, 0\}, \quad (5.4)$$

где S_0 – полная интенсивность волны. В другом предельном случае полностью поляризованная волна обладает только одним типом поляризации, которая может быть линейной, круговой или эллиптической. В этом случае временная зависимость линейно-поляризованных в x - и y -направлениях компонент волны записывается в виде

$$\tilde{E}_x(t)e^{i\delta_x(t)} = A(t)e^{i\delta(t)}[\cos \alpha \cos \theta - i \sin \alpha \sin \theta],$$

$$\tilde{E}_y(t)e^{i\delta_y(t)} = A(t)e^{i\delta(t)}[\sin \alpha \cos \theta + i \cos \alpha \sin \theta].$$

Эти выражения получаются из построения вектора Джонса, описывающего эллиптическое колебание с заданными амплитудой A , фазой δ , азимутом α и углом эллиптичности θ [18].

Будем считать, что азимут α и угол эллиптичности θ остаются постоянными, а полная амплитуда A и абсолютная фаза δ изменяются во времени. Как легко видеть, эти выражения удовлетворяют условиям полной поляризации

$$\frac{\widetilde{E}_y(t)}{\widetilde{E}_x(t)} = \text{const}, \quad [\delta_y(t) - \delta_x(t)] = \text{const}.$$

Подставляя эти выражения в (5.2), получаем следующий вектор Стокса:

$$\mathbf{S}_{\text{пол}} = \{S_0, S_0 \cos 2\alpha \cos 2\theta, S_0 \sin 2\alpha \cos 2\theta, S_0 \sin 2\theta\}, \quad (5.5)$$

где $S_0 = \langle A^2(t) \rangle$ – полная интенсивность волны. Легко показать, что параметры Стокса полностью поляризованной волны удовлетворяют следующему условию:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (5.6)$$

Используя основное определение параметров Стокса (5.2), можно доказать, что для частично поляризованного и неполяризованного света параметры Стокса вместо соотношения (5.7) удовлетворяют неравенству

$$S_0^2 > S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (5.7)$$

Формулы (5.4)– (5.7) наводят на мысль, что в общем случае частично поляризованного света его можно разложить на две компоненты: полностью поляризованную компоненту и неполяризованную компоненту [18]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{непол}} + \mathbf{S}_{\text{пол}},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \{S_0, S_1, S_2, S_3\}, \\ \mathbf{S}_{\text{непол}} &= \{[S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}], 0, 0, 0\}, \\ \mathbf{S}_{\text{пол}} &= \{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, S_1, S_2, S_3\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Заметим, что каждый параметр Стокса исходного луча равен сумме соответствующих параметров составляющих лучей.

При описании частично поляризованного света важную роль играет *степень поляризации*, которая определяется как отношение интенсивности полностью поляризованной компоненты к общей интенсивности волны:

$$\mathfrak{P} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}. \quad (5.9)$$

Степень поляризации \mathfrak{P} изменяется от нуля для неполяризованного света до единицы для полностью поляризованного света и принимает промежуточное (дробное) значение для частично поляризованного света. Азимут α и угол эллиптичности θ эллипса поляризации полностью поляризованной компоненты можно получить, сравнивая параметры Стокса этой компоненты в (5.8) с выражением (5.5):

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{S_2}{S_1}, \theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}. \quad (5.10)$$

Используя полную интенсивность I , степень поляризации \mathfrak{P} , азимут α и угол эллиптичности θ полностью поляризованной компоненты, вектор Стокса для квазимонохроматической волны можно записать в виде

$$\mathbf{S} = I\{1, \mathfrak{P} \cos 2\theta \cos 2\alpha, \mathfrak{P} \cos 2\theta \sin 2\alpha, \mathfrak{P} \sin 2\theta\}. \quad (5.11)$$

Для данного значения полной интенсивности I (например, равного единице) состояние поляризации определяют величины \mathfrak{P} , θ и α . Интересно и важно отметить, что в подпространстве Стокса (S_1, S_2, S_3) состояние поляризации квазимонохроматической волны представляется точкой с полярными координатами $(\mathfrak{P}, \frac{\pi}{2} - 2\theta, 2\alpha)$, как видно из рис. 5.1. Легко вывести следующие свойства поляризационного подпространства Стокса.

1. Начало координат $\mathfrak{P} = 0$ представляет неполяризованное состояние.

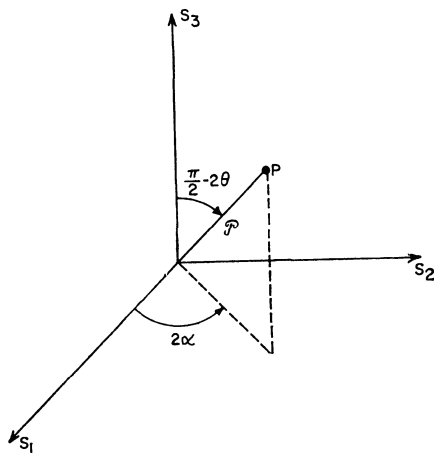


Рис. 5.1. Представление частично поляризованного света точкой P в подпространстве Стокса (S_1, S_2, S_3)

2. Каждая точка поверхности единичной сферы $\mathfrak{P} = 1$ представляет различные полностью поляризованные состояния.
3. Исключая начало координат, точки внутри единичной сферы $0 < \mathfrak{P} < 1$ представляют частично поляризованную волну. Точки вне единичной сферы $\mathfrak{P} > 1$ не представляют какое-либо физическое состояние поляризации.

§ 3. Матрица когерентности

Одно из наиболее известных представлений поляризации квазимонохроматических волн основано на матрице когерентности [18]. Матрица когерентности (2×2) определяется через зависящий от времени декартов вектор Джонса (5.12) следующим образом:

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E}_{x,y}(t) \times \mathbf{E}_{x,y}^\dagger(t) \rangle = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

где \times означает простое произведение вектора Джонса на эрмитово-сопряженный вектор, а $E_x = \tilde{E}_x(t)e^{i\delta_x(t)}$ и $E_y = \tilde{E}_y(t)e^{i\delta_y(t)}$.

Табл. 5.1. Вектора Стокса для некоторых типов поляризации света с нормировкой интенсивности на единицу и соответствующие вектора Джонса

Тип поляризации	Вектор Стокса	Вектор Джонса
Неполяризованный свет	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Не существует
Линейно поляризованный свет в направлении оси x	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Линейно поляризованный свет в направлении оси y	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Линейно поляризованный свет под углом θ к направлению оси x	$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
Линейно поляризованный свет под углом 45° к направлению оси x	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Правая эллиптическая поляризация с осями параллельными осям x и y	$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ 0 \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ i \sin \theta \end{pmatrix}$
Левая эллиптическая поляризация с осями параллельными осям x и y	$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ 0 \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -i \sin \theta \end{pmatrix}$

Окончание табл. 5.1

Тип поляризации	Вектор Стокса	Вектор Джонса
Циркулярно поляризованный свет по правому кругу	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
Циркулярно поляризованный свет по левому кругу	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Диагональные элементы J_{xx} и J_{yy} матрицы когерентности \mathbf{J} действительны и представляют собой интенсивности линейно-поляризованных в x - и y -направлениях компонент волны. Полная интенсивность равна следу матрицы \mathbf{J} :

$$I = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle = J_{xx} + J_{yy} = Sp \mathbf{J}. \quad (5.13)$$

Недиагональные элементы J_{xy} и J_{yx} определяют взаимную корреляцию между x - и y -компонентами электрического вектора. Эти элементы комплексно сопряжены друг с другом, поэтому матрица когерентности является эрмитовой (т.е. $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}$). Нормированная функция взаимной корреляции $\mu_{x,y}$ определяется следующим образом:

$$\mu_{x,y} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx} + J_{yy}}}.$$

В силу неравенства Шварца³ модуль функции $\mu_{x,y}$ ограничен, а детерминант матрицы когерентности имеет положительную действительную величину

$$|\mu_{x,y}| \leq 1,$$

³Для двух, комплексных функций $f(t)$ и $g(t)$ одного и того же действительного аргумента t неравенство Шварца имеет вид

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

Равенство имеет место, если между функциями $f(t)$ и $g(t)$ существует пропорциональность.

$$\det \mathbf{J} = J_{xx}J_{yy}(1 - |\mu_{x,y}|^2) \geq 0.$$

Предельные случаи неполяризованного и полностью поляризованного света соответствуют полному отсутствию корреляции и полной корреляции между E_x и E_y и характеризуются значениями $|\mu_{x,y}| = 0$ и 1. Значениям $|\mu_{x,y}|$ между 0 и 1 соответствуют промежуточные более общие случаи частичной поляризации⁴.

Закон, по которому матрица когерентности преобразуется при повороте системы координат, имеет вид

$$\mathbf{J}' = R(\varphi)\mathbf{J}R^\dagger(\varphi),$$

где $R(\varphi)$ – матрица поворота. Так как $R^\dagger(\varphi) = R^{-1}(\varphi) = R(-\varphi)$, матрица когерентности при повороте системы координат на угол φ вокруг оси пучка подвергается унитарному преобразованию. При унитарном преобразовании детерминант ($\det J$) и след ($\text{Sp}J$) матрицы когерентности \mathbf{J} остаются инвариантными.

Как и можно было ожидать на основании соотношений (5.2) и (5.12), параметры Стокса и элементы матрицы когерентности взаимосвязаны. В частности, параметры Стокса являются простой линейной комбинацией элементов матрицы когерентности:

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy}, \\ S_1 &= J_{xx} - J_{yy}, \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx}, \\ S_3 &= -i(J_{xy} - J_{yx}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

В матричной форме соотношения (5.14) имеют вид

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

⁴Если линейно-поляризованные x - и y -компоненты квазимонохроматической волны света некогерентны, то $|\mu_{x,y}| = 0$. Если интенсивности этих компонент не равны (т. е. $J_{xx} \neq J_{yy}$), то волна частично поляризована. В противном случае (т. е. при $J_{xx} = J_{yy}$) волна неполяризована.

или

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{J},$$

где \mathbf{J} есть 4×1 вектор когерентности, элементы которого совпадают с элементами матрицы когерентности \mathbf{J} (5.12).

Степень поляризации \mathfrak{P} можно получить из элементов матрицы когерентности \mathbf{J} , подставляя выражения (5.14) в (5.9). Результат имеет вид

$$\mathfrak{P} = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{J}}{(\text{Sp} \mathbf{J})^2}}, \quad (5.16)$$

где \mathfrak{P} следует брать только положительное значение корня. Детерминант $\det \mathbf{J}$ и след $\text{Sp} \mathbf{J}$ инвариантны относительно унитарного преобразования, так же как и степень поляризации \mathfrak{P} , что и следовало ожидать.

Подобным же образом азимут α и угол эллиптичности θ эллипса поляризации полностью поляризованной компоненты частично поляризованного луча можно получить из элементов матрицы когерентности \mathbf{J} прямой подстановкой выражений (5.14) в (5.10):

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{J_{xy} + J_{yx}}{J_{xx} - J_{yy}}, \quad (5.17)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{i(J_{yx} - J_{xy})}{(J_{xx} + J_{yy})\mathfrak{P}},$$

где \mathfrak{P} определяется выражением (5.16).

Полная интенсивность I , степень поляризации \mathfrak{P} , форма поляризации (α и θ) полностью поляризованной компоненты несут всю физическую информацию о частично поляризованном свете. Соотношения (5.13), (5.16) и (5.17) показывают, как можно извлечь эту информацию, если известно представление волны матрицей когерентности.

Разложение света на две компоненты (полностью поляризованную компоненту и неполяризованную компоненту) можно представить так же и с помощью матрицы когерентности

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{непол.}} + \mathbf{J}_{\text{пол.}},$$

где \mathbf{J} – матрица когерентности всего луча, а $\mathbf{J}_{\text{непол.}}$ и $\mathbf{J}_{\text{пол.}}$ – матрицы когерентности неполяризованной и полностью поляризованной компонент луча.

В табл. 5.2 приведены матрицы когерентности для различных состояний поляризации света.

Табл. 5.2. Матрицы когерентности для различных состояний поляризации световой волны с интенсивностью I

Состояние поляризации	Матрица когерентности
Свет, полностью линейно-поляризованный в направлении оси x	$\mathbf{J} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Линейно-поляризованный свет с произвольным азимутом α	$\mathbf{J} = I \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$
Правоциркулярно поляризованный свет	$\mathbf{J} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
Левовциркулярно поляризованный свет	$\mathbf{J} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
Декартова матрица когерентности полностью поляризованного монохроматического или квазимонохроматического света с азимутом α и углом эллиптичности θ	$\mathbf{J}_{\text{дек}} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$ $A = 1 + \cos 2\alpha \cos 2\theta,$ $B = \cos 2\theta \sin 2\alpha - i \sin 2\theta,$ $C = \sin 2\alpha \cos 2\theta + i \sin 2\theta,$ $D = 1 - \cos 2\alpha \cos 2\theta$

§ 4. Матрица Мюллера

Теперь мы рассмотрим наиболее общий случай, когда частично поляризованный квазимонохроматический свет распространяется через деполяризирующую оптическую систему, которая уменьшает степень поляризации пропускаемого света. Ни формализм

матриц Джонса, ни формализм матрицы когерентности не могут быть использованы при рассмотрении этого общего случая. Причина этого заключается в том, что детерминированная комплексная 2×2 матрица Джонса неприменима для описания деполяризующего некогерентного взаимодействия между падающей волной и оптической системой. Нам следует обратиться к более мощному формализму матрицы Мюллера [18].

Формализм матрицы Мюллера основан на представлении состояния поляризации световой волны вектором Стокса и представлении деполяризующей оптической системы матрицей Мюллера (4×4), все элементы которой – действительные числа. Результат взаимодействия световой волны с оптической системой можно рассчитать, умножая слева вектор Стокса падающей волны на матрицу Мюллера рассматриваемой оптической системы. В результате этой операции мы получаем вектор Стокса выходящей волны. Чтобы пояснить эту процедуру на простом примере, рассмотрим недеполяризующую оптическую систему, поскольку формализм матрицы Мюллера вполне применим для такого частного случая.

Выше квазимонохроматическая волна описывалась с помощью зависящего от времени двухкомпонентного комплексного вектора Джонса $\mathbf{E}_{x,y}(t)$ [см. выражение (5.12)]. Такой вектор Джонса линейно преобразуется под воздействием линейной недеполяризующей оптической системы, так что векторы Джонса выходящего и входящего света связаны следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{1x}(t)e^{i\delta_{1x}(t)} \\ \tilde{E}_{1y}(t)e^{i\delta_{1y}(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{0x}(t)e^{i\delta_{0x}(t)} \\ \tilde{E}_{0y}(t)e^{i\delta_{0y}(t)} \end{pmatrix},$$

где матрица Джонса \mathbf{T} оптической системы (обладающей дисперсией) определяется при средней частоте ω_0 квазимонохроматического света, индексы 0 и 1 указывают на принадлежность компоненты вектора Джонса к входящей и выходящей волнам. Запишем это соотношение в более краткой форме

$$\mathbf{E}_1(t) = \mathbf{T}\mathbf{E}_0(t). \quad (5.18)$$

Умножим сначала обе части уравнения (5.18) на соответствующие эрмитово-сопряженные величины, а затем произведем усреднение по времени; в результате получаем

$$\langle \mathbf{E}_1(t) \times \mathbf{E}_1^\dagger(t) \rangle = \langle \mathbf{T} \mathbf{E}_0(t) \times \mathbf{E}_0^\dagger(t) \mathbf{T}^\dagger \rangle,$$

так что

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{T} \mathbf{J}_0 \mathbf{T}^\dagger. \quad (5.19)$$

Здесь \mathbf{J}_0 и \mathbf{J}_1 – матрицы когерентности входящей (падающей) и выходящей световых волн, а \mathbf{T} – матрица Джонса оптической системы.

Соотношение (5.19) представляет собой *основной закон распространения частично поляризованного света через линейные недеполяризующие оптические системы* [18].

Теперь, умножая (справа) каждую часть соотношения (5.18) на его комплексно-сопряженную величину и усредняя по времени, получаем

$$\langle \mathbf{E}_1(t) \times \mathbf{E}_1^*(t) \rangle = \langle \mathbf{T} \mathbf{E}_0(t) \times \mathbf{T}^* \mathbf{E}_0^*(t) \rangle = (\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*) \langle \mathbf{E}_0(t) \times \mathbf{E}_0^*(t) \rangle. \quad (5.20)$$

При выводе использовано матричное тождество $AB \times CD = (A \times C)(B \times D)$ и предположение о том, что матрица Джонса \mathbf{T} оптической системы не зависит от времени. При усреднении по времени произведения $\langle \mathbf{E}(t) \times \mathbf{E}^*(t) \rangle$ получаем *вектор когерентности* \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E}(t) \times \mathbf{E}^*(t) \rangle = \begin{pmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{pmatrix}.$$

Выражение (5.20) можно записать через вектор когерентности \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}_1 = (\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*) \mathbf{J}_0.$$

Так как вектор когерентности \mathbf{J} линейно связан с вектором Стокса \mathbf{S} ($\mathbf{S} = \mathbf{A} \mathbf{J}$ и $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}$), векторы Стокса \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_0 выходящей

и падающей волн связаны следующим образом:

$$(A^{-1}S_1) = (T \times T^*)(A^{-1}S_0),$$

$$S_1 = [A(T \times T^*)A^{-1}]S_0,$$

или более кратко:

$$S_1 = MS_0, \quad (5.21)$$

где

$$M = A(T \times T^*)A^{-1} \quad (5.22)$$

и A есть матрица 4×4 , которая определяется соотношением (5.15).

Соотношение (5.21) представляет собой основной закон преобразования вектора Стокса частично поляризованной световой волны, распространяющейся через оптическую систему. Действительная матрица M называется матрицей Мюллера оптической системы. Хотя вывод соотношения (5.21) основывался на предположении, что оптическая система является недеполяризующей, соотношение (5.21) применимо и для более общего случая деполаризующей оптической системы. Для недеполяризующей оптической системы матрицу Мюллера M можно вычислить, исходя из матрицы Джонса T [выражение (5.22)]. В этом случае из шестнадцати элементов матрицы M независимы только семь. Когда оптическая система проявляет деполаризующие свойства, выражение (5.22) неприменимо, так как нельзя определить матрицу Джонса T для такой системы. В этом случае все шестнадцать действительных элементов матрицы Мюллера могут быть независимыми.

Выполняя матричное умножение в (5.22) (где A определяется выражением (5.15)), получаем

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) & \frac{1}{2}(E_1 - E_2 - E_3 + E_4) & F_{13} + F_{42} & -G_{13} - G_{42} \\ \frac{1}{2}(E_1 - E_2 + E_3 - E_4) & \frac{1}{2}(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) & F_{13} - F_{42} & -G_{13} + G_{42} \\ F_{14} + F_{32} & F_{14} - F_{32} & F_{12} + F_{34} & -G_{12} + G_{34} \\ G_{14} + G_{32} & G_{14} + G_{32} & G_{12} + G_{34} & F_{12} + F_{34} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

где $E_k = T_k T_k^*$, $F_{jk} = F_{kj} = \text{Re}(T_j T_k^*) = \text{Re}(T_k T_j^*)$, $G_{jk} = -G_{kj} = \text{Im}(T_j T_k^*) = -\text{Im}(T_k T_j^*)$, $j, k = 1, 2, 3, 4$. Для простоты здесь использовано обозначение $T_1 = T_{11}$, $T_2 = T_{22}$,

$T_3 = T_{12}$, $T_4 = T_{21}$. Эти выражения можно использовать для построения матрицы Мюллера оптического устройства, матрица Джонса которого известна. Так, например, матрица Джонса оптического ротатора имеет вид

$$T = R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (5.23), получаем соответствующую матрицу Мюллера:

$$M = R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Матрицу $R(\alpha)$, определяемую выражением (5.24), можно также рассматривать как матрицу поворота, которая преобразует вектор Стокса при переходе от одной системы декартовых координат (x, y) к другой (x', y') , повернутой по отношению к первой на угол α . В соответствии с этим $S' = R(\alpha)S$.

При одновременном повороте на один и тот же угол декартовых систем координат (относительно которых рассматривается состояние поляризации) на входе и выходе оптической системы матрица Мюллера этой системы видоизменяется следующим образом:

$$M_{\text{нов}} = R(-\alpha)M_{\text{стар}}R(\alpha). \quad (5.25)$$

Если световая волна последовательно проходит каскад из N оптических элементов (систем), то результирующее воздействие такого ряда устройств описывается матрицей Мюллера, вычисляемой по формуле:

$$M_{\text{системы}} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1, \quad (5.26)$$

где M_k – матрица Мюллера для k -го оптического элемента, воздействующего на волну; индексы 1, 2, ..., N указывают порядок,

в котором элементы расположены на пути волны. Выражение (5.26) опять совершенно аналогично выражению (4.9) для матрицы Джонса.

Обращаясь к основному соотношению формализма матрицы Мюллера (5.21), нетрудно видеть, как можно рассчитать результат прохождения квазимонохроматической световой волны через деполяризующую оптическую систему. Конкретно вектор Стокса S_0 волны, выходящей из оптической системы, получаем в результате действия (умножения) матрицы Мюллера рассматриваемой оптической системы на вектор Стокса S_1 световой волны, падающей на вход системы. Вычислив вектор Стокса S_0 , можно рассчитать такие свойства выходящей волны, как ее полная интенсивность, степень поляризации или форма поляризации ее полностью поляризованной компоненты.

Выражение для зависящего от поляризации пропускания по интенсивности оптической системы при использовании формализма матрицы Мюллера получается наиболее просто. Причина этого заключается в том, что полная интенсивность представляет собой первый элемент вектора Стокса. Подставляя вектор Стокса S_1 (5.11) в (5.21), сразу получаем пропускание по интенсивности:

$$\tau = \frac{I_0}{I_1} = m_{11} + \mathfrak{P}[m_{12} \cos 2\theta \cos 2\alpha + m_{13} \cos 2\theta \sin 2\alpha + m_{14} \sin 2\theta];$$

здесь m_{11} , m_{12} , m_{13} и m_{14} – элементы первой строки матрицы Мюллера M оптической системы, \mathfrak{P} – степень поляризации падающей волны, а α и θ описывают форму поляризации полностью поляризованной компоненты этой волны. Это выражение показывает, что зависящее от поляризации пропускание по интенсивности произвольной оптической системы (деполяризующей или недеполяризующей) полностью определяется четырьмя действительными параметрами.

Хотя формализм матрицы Мюллера специально предназначен для изучения распространения частично поляризованного света через деполяризующие оптические системы, диапазон его применимости охватывает, очевидно, и частные случаи, когда оптиче-

ская система является недеполяризующей, а падающий свет либо частично, либо полностью поляризован. В этих частных случаях формализм матрицы Мюллера определенно является более мощным, чем это нужно. Если падающая волна полностью поляризована, а оптическая система не обладает депполяризующими свойствами, то ни формализм матрицы Мюллера, ни формализм матрицы когерентности не пригодны для получения информации об абсолютной фазе волны. Это обусловлено тем, что информация об абсолютной фазе теряется при определении вектора Стокса (5.2) и матрицы когерентности (5.12). В таком случае необходимо использовать формализм матрицы Джонса. Вообще, выбор конкретного метода описания распространения поляризованного света через ту или иную оптическую систему зависит от свойств оптической системы и природы рассматриваемого светового пучка [18].

§ 5. Матрицы Мюллера основных оптических элементов

Получим вид матриц Мюллера для простых оптических элементов, используя мысленный эксперимент, заключающийся в пропускании через оптический элемент световых волн в различных состояниях поляризации (см. табл. 5.1).

1. *Идеальный поляризатор с плоскостью пропускания к оси x под углом θ .* Для краткости записи дальнейших выражений введем обозначение $\cos \theta \equiv c_1$, $\sin \theta \equiv s_1$, $\cos 2\theta \equiv c_2$, $\sin 2\theta \equiv s_2$. Пусть матрица Мюллера в самом общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} X & B & T & D \\ E & F & G & H \\ J & K & L & M \\ N & P & R & S \end{pmatrix}.$$

Определим элементы этой матрицы.

а. Пусть на поляризатор падает неполяризованный свет, вектор Стокса которого (при нормировке интенсивности на единицу)

определен столбцом

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Луч, прошедший через поляризатор, поляризован и имеет в два раза меньшую интенсивность. Плоскость поляризации ориентирована под углом θ к оси x , т.е. вектор Стокса такого луча определен столбцом вида

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Связывая падающий и прошедший лучи посредством матрицы Мюллера, имеем

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & B & T & D \\ E & F & G & H \\ J & K & L & M \\ N & P & R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что

$$X = \frac{1}{2}, \quad E = \frac{1}{2}c_2, \quad N = 0, \quad J = \frac{1}{2}s_2.$$

б. Предположим, что на поляризатор падает поляризованная волна с плоскостью поляризации под углом θ к оси x . Такой луч пройдет без изменения интенсивности и без изменения состояния поляризации, т.е.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & B & T & D \\ \frac{1}{2}c_2 & F & G & H \\ \frac{1}{2}s_2 & K & L & M \\ 0 & P & R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{2} = Bc_2 + Ts_2, \quad (5.27)$$

$$\frac{1}{2}c_2 = Fc_2 + Gs_2, \quad (5.28)$$

$$\frac{1}{2}s_2 = Kc_2 + Ls_2, \quad (5.29)$$

$$0 = Pc_2 + Rs_2. \quad (5.30)$$

Связь (5.30) выполняется для любых ориентаций поляризатора (т.е. для любых значений s_2 и c_2). Если положить $s_2 = 0$, то $P = 0$. При $c_2 = 0$ имеем $R = 0$.

в. Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет вдоль оси x . Если считать, что амплитуда падающего луча равна A , то волна, прошедшая через поляризатор, ориентированный под углом θ , будет характеризоваться амплитудой $A \cos \theta$. Тогда интенсивности падающей и прошедшей через поляризатор волн будут равны A^2 и $A^2 \cos^2 \theta = A^2 c_1^2$, соответственно. А вектора Стокса этих лучей имеют вид

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } A^2 c_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем матричное уравнение

$$A^2 c_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & B & T & D \\ \frac{1}{2}c_2 & F & G & H \\ \frac{1}{2}s_2 & K & L & M \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое дает $B = c_2/2$, $F = c_2^2/2$, $K = s_2 c_2/2$. Используя уравнения (5.27 – 5.29), находим $T = s_2/2$, $G = c_2 s_2/2$, $L = s_2^2/2$.

г. Остальные элементы матрицы Мюллера получим из следующих рассуждений: пусть на поляризатор падает луч с правой

круговой поляризацией и амплитудой A (радиус круга). Зная, что интенсивность такого луча равна $2A^2$, имеем вектор Стокса для падающего луча вида

$$2A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Прошедший через поляризатор луч ослабляется в 2 раза, а его вектор Стокса имеет вид

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матричная связь

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}s_2 & D \\ \frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}c_2^2 & \frac{1}{2}c_2s_2 & H \\ \frac{1}{2}s_2 & \frac{1}{2}c_2s_2 & \frac{1}{2}s_2^2 & M \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} A^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

дает значения оставшихся элементов $D = 0$, $H = 0$, $M = 0$, $S = 0$.

Таким образом, матрица идеального поляризатора с плоскостью пропускания к оси x под углом θ имеет вид

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}s_2 & 0 \\ \frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}c_2^2 & \frac{1}{2}c_2s_2 & 0 \\ \frac{1}{2}s_2 & \frac{1}{2}c_2s_2 & \frac{1}{2}s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Полуволновая пластинка с оптической осью под углом θ к оси x создает разность фаз между обыкновенным и необыкновенным

лучами, прошедшими через нее, равную π . Для определенности будем считать, что увеличивается фаза необыкновенной волны. При прохождении линейнополяризованного луча через пластинку она поворачивает плоскость колебаний на угол 2θ . При этом энергия света не поглощается, а плоскость колебаний поворачивается относительно оптической оси так же, как при зеркальном отражении.

Пусть матрица Мюллера пластинки имеет вид

$$\begin{pmatrix} X & B & Y & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ P & R & S & T \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи будем использовать $\cos \theta \equiv c_1$, $\sin \theta \equiv s_1$, $\cos 2\theta \equiv c_2$, $\sin 2\theta \equiv s_2$, $\cos 4\theta \equiv c_4$, $\sin 4\theta \equiv s_4$.

а. Пусть на пластинку падает плоскополяризованный (по оси x) луч единичной интенсивности, описываемый вектором Стокса

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Такой луч преобразуется пластинкой без изменения его интенсивности в плоскополяризованный луч, плоскость колебаний которого составляет угол 2θ с осью x , т.е. вектор Стокса этого луча записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 4\theta \\ \sin 4\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c_4 \\ s_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c_4 \\ s_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & B & Y & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ P & R & S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем связь между некоторыми элементами:

$$W + B = 1, \tag{5.31}$$

$$E + F = c_4, \tag{5.32}$$

$$K + L = s_4, \tag{5.33}$$

$$P + R = 0. \tag{5.34}$$

б. Если на пластинку падает неполяризованный свет, то он проходит без изменения своих характеристик, т.е. можно записать:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & B & Y & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ P & R & S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что дает $W = 1, E = 0, K = 0, P = 0$, а из (5.9) – (5.34) имеем $B = 0, F = c_4, L = s_4, R = 0$.

в. Если через полуволновую пластинку проходит плоскополяризованная волна с поляризацией под углом θ к оси x , то эта волна также не меняет своих характеристик, т.е. сохраняет состояние поляризации

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Y & D \\ 0 & c_4 & G & H \\ 0 & s_4 & M & N \\ 0 & 0 & S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае находим $Y = 0, G = s_4, M = -c_4, X = 0$.

Остается найти еще четыре элемента.

г. В заключение будем считать, что на фазовую пластику падает луч с правой круговой поляризацией. После прохождения света через полуволновую пластинку его интенсивность не изменяется, а разность фаз, первоначально равная $\pi/2$, станет равной $\pi/2 + \pi = 3\pi/2$, что эквивалентно $-\pi/2$, т.е. произойдет смена круговой поляризации с правой на левую. Записывая матричную

СВЯЗЬ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & D \\ 0 & c_4 & s_4 & H \\ 0 & s_4 & -c_4 & N \\ 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

вычисляем недостающие элементы $D = 0$, $H = 0$, $N = 0$, $T = -1$.

Таким образом, матрица Мюллера для полуволновой пластинки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \sin 4\theta & -\cos 4\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Четвертьволновая пластинка с оптической осью под углом θ к оси x характеризуется матрицей Мюллера [4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Произвольная фазовая пластинка, создающая фазовую задержку δ , с оптической осью под углом θ к оси x [4]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \delta & \cos 2\theta \sin 2\theta (1 - \cos \delta) & -\sin 2\theta \sin \delta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta (1 - \cos \delta) & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \cos \delta & \cos 2\theta \sin \delta \\ 0 & \sin 2\theta \sin \delta & -\cos 2\theta \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}.$$

Как было отмечено в предыдущем параграфе, матрицу Мюллера недеполяризующего оптического устройства или системы можно получить, подставляя матрицу Джонса оптического элемента в выражения (5.23). Явное выражение такой матрицы для общего случая, т. е. для эллиптических компенсатора и поляризатора, довольно сложно. В конце этого параграфа приведены матрицы Мюллера линейного компенсатора, линейный поляризатор

мы уже рассмотрели. В этих случаях предполагается, что входная и выходная координатные системы параллельны плоскости, содержащей главные направления прибора (т. е. оси пропускания и гашения в случае поляризатора и быструю и медленную оси в случае компенсатора).

Как правило, для нахождения матрицы Мюллера оптического элемента с произвольной ориентацией пользуются законом преобразования матрицы Мюллера (5.25), зная вид матрица оптического элемента с простой ориентацией, например с ориентацией $\theta = 0$.

Таким же образом для оптического элемента, выполняющего несколько преобразований, матрицу Мюллера можно получить из выражения матрицы Мюллера для каскада оптических элементов (5.26). Например, матрицу Мюллера изотропной поверхности, отражающей наклонно падающий на нее свет, можно получить, умножая матрицу Мюллера линейного компенсатора с фазовой задержкой δ на матрицу частичного поляризатора с относительным амплитудным затуханием $\sqrt{\tau_{\text{мин}}/\tau_{\text{макс}}} = \text{tg}\psi$; обе эти матрицы, а так же матрицы других оптических элементов приведены в табл. 5.3. Нормализованная к единичной отражательной способности для неполяризованного падающего света результирующая матрица поверхности с эллипсометрическими параметрами ψ , δ имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\cos 2\psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\psi \cos \delta & \sin 2\psi \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin 2\psi \sin \delta & \sin 2\psi \cos \delta \end{pmatrix}.$$

Табл. 5.3. Матрицы Мюллера основных оптических элементов

Оптический элемент	Матрица Мюллера
Полуволновая пластинка с оптической осью под углом θ к оси x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \sin 4\theta & -\cos 4\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Четвертьволновая пластинка с оптической осью под углом θ к оси x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{pmatrix}$
Произвольная фазовая пластинка, создающая фазовую задержку δ , с оптической осью под углом θ к оси x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \delta & \cos 2\theta \sin 2\theta(1 - \cos \delta) & -\sin 2\theta \sin \delta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta(1 - \cos \delta) & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \cos \delta & \cos 2\theta \sin \delta \\ 0 & \sin 2\theta \sin \delta & -\cos 2\theta \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$

Окончание табл. 5.3

Идеальный поляризатор с плоскостью пропускания к оси x под углом θ	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Линейный частичный поляризатор (с максимальным и минимальным пропусканием τ_{\max} и τ_{\min})	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_{\max} + \tau_{\min} & \tau_{\max} - \tau_{\min} & 0 & 0 \\ \tau_{\max} - \tau_{\min} & \tau_{\max} + \tau_{\min} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\tau_{\max}\tau_{\min}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\tau_{\max}\tau_{\min}} \end{pmatrix}$
Линейный компонент фазовой задержкой δ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$
Вращатель (рогатор с углом поворота α)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§ 6. Экспериментальное определение элементов матриц Мюллера и векторов Стокса

Теперь опишем методы, с помощью которых можно экспериментально находить параметры Стокса для любого светового пучка и матрицы Мюллера для произвольного оптического прибора [4].

Во-первых, нам необходимо научиться измерять параметры Стокса для произвольного луча. Предположим, что мы можем измерять непосредственно интенсивность пучка, используя, скажем, фотоэлемент, а затем определять параметры Стокса путем наблюдения за изменениями этой интенсивности при прохождении пучка через различные приборы. Как обычно, предположим, что пучок распространяется горизонтально в направлении оси z и что ось y расположена в вертикальной плоскости, а ось x – в горизонтальной. В общем случае, для того чтобы определить путем измерений полный столбец Стокса, необходимо провести следующие шесть измерений интенсивности.

1. На пути пучка устанавливается поляроидная пленка так, что плоскость пропускания ее параллельна оси x . Поляроид пропускает интенсивность I_x , которая пропорциональна квадрату амплитуды вектора напряженности электрического поля, параллельного оси x , т. е. $\langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle$ в наших прежних обозначениях. Таким образом, $I_x = \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle$.

2. Затем поляроидную пленку поворачивают до тех пор, пока ее плоскость пропускания не станет вертикальной, т. е. параллельной оси y . Теперь поляризатор пропускает интенсивность I_y , пропорциональную квадрату y -компоненты вектора напряженности электрического поля, т. е. $I_y = \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle$. Далее, исходя из определения параметров Стокса, находим

$$S_0 = \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle + \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle = I_x + I_y$$

и

$$S_1 = \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle - \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle = I_x - I_y.$$

3. Исходный пучок пропустим теперь через поляририд, плоскость пропускания которого образует угол 45° с горизонталью и проходит через первый и третий квадранты координатной плоскости. Используя полученную выше матрицу Мюллера, соответствующую поляририду, находим столбец Стокса для пучка, прошедшего через поляририд:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_2 \\ 0 \\ S_0 + S_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, интенсивность $I_{\pi/4}$ пучка, прошедшего через поляририд, равна $(S_0 + S_2)/2$.

4. Пропустим теперь исходный пучок через поляририд, плоскость пропускания которого также образует угол 45° с горизонталью, но проходит через второй и четвертый квадранты координатной плоскости, так что угол удобно рассматривать как -45° . Если вычислить матрицу Мюллера для поляририда при таком значении угла α , то получим столбец Стокса для пучка, прошедшего через поляририд, в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 - S_2 \\ 0 \\ -S_0 + S_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность пучка на выходе этого поляририда равна $I_{-\pi/4} = (S_0 - S_2)/2$. После вычитания $I_{\pi/4}$ из $I_{-\pi/4}$ имеем $I_{\pi/4} - I_{-\pi/4} = S_2$.

Таким образом, на данном этапе мы определили три из четырех параметров Стокса. Для того чтобы измерить четвертый параметр, на пути пучка установим четвертьволновую пластинку так, чтобы ее быстрая ось была горизонтальна. Используя матрицу Мюллера для четвертьволновой пластинки, получаем столбец

Стокса для пучка, прошедшего через эту пластинку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_3 \\ -S_2 \end{pmatrix}.$$

5. Пучок, прошедший через четвертьволновую пластинку, пропустим затем через поляририд, ориентированный также, как и при третьем измерении. В этом случае столбец Стокса имеет

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_3 \\ -S_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_3 \\ 0 \\ S_0 + S_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность пучка на выходе поляриоида $I_1 = (S_0 + S_3)/2$.

6. Пучок, вышедший из четвертьволновой пластинки, пропустим теперь через поляририд, ориентированный как в четвертом измерении. Столбец Стокса получается тогда следующим образом:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_3 \\ -S_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 - S_3 \\ 0 \\ -S_0 + S_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а интенсивность равна $I_2 = (S_0 - S_3)/2$.

Для того чтобы определить первый элемент в двух последних столбцах Стокса, вычтем интенсивность I_1 из I_2 . В результате получаем $S_3 = I_1 - I_2$. Таким образом, мы измерили все четыре параметра Стокса для исходного пучка.

Посмотрим теперь, каким образом можно использовать эти результаты для определения элементов матрицы Мюллера любого оптического прибора, пропуская через прибор пучки света с различными состояниями поляризации и измеряя параметры Стокса выходящего пучка.

Предположим, что для исходного пучка столбцом Стокса является $\mathbf{S}^{(1)}$, а для пучка, прошедшего через систему, $\mathbf{S}^{(2)}$ и что матрица Мюллера равна \mathbf{T} . Следовательно, мы имеем $\mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{T}\mathbf{S}^{(1)}$, т. е.

$$\begin{pmatrix} S_0^{(2)} \\ S_1^{(2)} \\ S_2^{(2)} \\ S_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ J & K & L & M \\ N & P & R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0^{(1)} \\ S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \\ S_3^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Пропустим теперь пучки света четырех различных типов поляризации через прибор по очереди и измерим описанными выше методами параметры Стокса для выходного пучка.

1. Пропустим сначала через прибор неполяризованный свет. Пусть его интенсивность равна α ; тогда $S_0^{(1)} = \alpha$, а $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}$ равны нулю, как следует из формул, приведенных выше для случая неполяризованного света. При этом уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} S_0^{(2)} &= A\alpha \text{ т.е. } A = S_0^{(2)}/\alpha, \\ S_1^{(2)} &= E\alpha \text{ т.е. } E = S_1^{(2)}/\alpha, \\ S_2^{(2)} &= J\alpha \text{ т.е. } J = S_2^{(2)}/\alpha, \\ S_3^{(2)} &= N\alpha \text{ т.е. } N = S_3^{(2)}/\alpha. \end{aligned}$$

2. Пусть на прибор поступает пучок плоскополяризованного света, плоскость поляризации которого параллельна оси x . В этом случае $S_0^{(1)} = S_1^{(1)}$ и равны интенсивности, например, β , а $S_2^{(1)}$ и $S_3^{(1)}$ равны нулю. Следовательно, если обозначить столбец Стокса для пучка, прошедшего через эту систему, как $\mathbf{S}^{(3)}$, то уравнения принимают

$$\begin{aligned} S_0^{(3)} &= (A + B)\beta \text{ т.е. } B = S_0^{(3)}/\beta - A, \\ S_1^{(3)} &= (E + F)\beta \text{ т.е. } F = S_1^{(3)}/\beta - E, \\ S_2^{(3)} &= (J + K)\beta \text{ т.е. } K = S_2^{(3)}/\beta - J, \\ S_3^{(3)} &= (N + P)\beta \text{ т.е. } P = S_3^{(3)}/\beta - N. \end{aligned}$$

3. Пропустим теперь через прибор линейно-поляризованный свет, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с осью x и проходит через первый и третий квадранты координатной плоскости. Для этого пучка $S_0^{(1)} = S_2^{(1)} = \mu$, в то время как $S_1^{(1)} = S_3^{(1)} = 0$. Следовательно, если обозначить столбец Стокса луча, прошедшего через систему, как $\mathbf{S}^{(4)}$, то получим уравнения

$$\begin{aligned} S_0^{(4)} &= (A + C)\mu \text{ т.е. } C = S_0^{(5)}/\mu - A, \\ S_1^{(4)} &= (E + G)\mu \text{ т.е. } G = S_1^{(5)}/\mu - E, \\ S_2^{(4)} &= (J + L)\mu \text{ т.е. } L = S_2^{(5)}/\mu - J, \\ S_3^{(4)} &= (N + R)\mu \text{ т.е. } R = S_3^{(5)}/\mu - N. \end{aligned}$$

4. Пусть затем через прибор проходит пучок света с правой круговой поляризацией, для которого $S_0^{(1)} = S_3^{(1)} = \omega$, а $S_1^{(1)} = S_2^{(1)} = 0$. Следовательно, если обозначить столбец Стокса в этом случае как $\mathbf{S}^{(5)}$, то можно написать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} S_0^{(5)} &= (A + D)\omega \text{ т.е. } D = S_0^{(4)}/\omega - A, \\ S_1^{(5)} &= (E + H)\omega \text{ т.е. } H = S_1^{(4)}/\omega - E, \\ S_2^{(5)} &= (J + M)\omega \text{ т.е. } M = S_2^{(4)}/\omega - J, \\ S_3^{(5)} &= (N + S)\omega \text{ т.е. } S = S_3^{(4)}/\omega - N. \end{aligned}$$

В каждом из полученных уравнений неизвестный элемент матрицы Мюллера выражается через измеряемые интенсивности и вычисленные ранее элементы матрицы Мюллера. С помощью этой схемы, следовательно, можно определить все шестнадцать элементов матрицы Мюллера, характеризующей прибор.

§ 7. Связь матричных формализмов Джонса и Мюллера

Поскольку и матрица Мюллера, и матрица Джонса описывают свойства оптических приборов и для полностью поляризованного света результаты, полученные тем и другим методом, всегда совпадают, то между этими двумя методами расчета должна

существовать тесная связь. Оказывается, что элементы матрицы Мюллера для конкретной системы можно выразить через элементы матрицы Джонса той же системы. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, что это можно сделать в рамках формализма матриц Джонса и Мюллера. Кроме того, мы получим формулы обратного перехода от одной матрицы к другой и вычислим действительную и мнимую части матрицы Джонса по известной матрице Мюллера (при условии, что матрица Мюллера описывает физически реализуемый поляризационный прибор) [4].

Вывод соотношения между векторами Стокса и Джонса

Покажем теперь, что все параметры Стокса можно выразить через вектор Джонса и через транспонированный ему комплексно сопряженный вектор и некоторые постоянные матрицы размерности 2×2 , которые мы определим в этом параграфе.

В общем случае вектор Джонса луча записывается в виде

$$E = \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Следовательно (используя матричное умножение), имеем

$$E^\dagger \times E = \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = H^2 + K^2.$$

Мы получили первый параметр Стокса луча, т. е. S_0 . Ниже между E^\dagger и E будет введена единичная квадратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; назовем ее A_1 . Разумеется, введение матрицы A_1 не может повлиять на конечный результат расчета. Таким образом, мы можем написать

$$E^\dagger \times A_1 \times E = S_0. \tag{5.35}$$

Для второго параметра Стокса составим матричное произведение вида:

$$\begin{aligned} E^\dagger \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times E &= \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \\ &= H^2 - K^2 = S_1. \end{aligned}$$

Все это можно записать в виде

$$E^\dagger \times A_2 \times E = S_1, \quad (5.36)$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для третьего и четвертого параметров Стокса имеем

$$\begin{aligned} E^\dagger \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times E &= \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ke^{i\delta} \\ H \end{pmatrix} = HKe^{i\delta} + HKe^{-i\delta} = 2HK \cos \delta = S_2. \end{aligned}$$

Это можно записать в виде

$$E^\dagger \times A_3 \times E = S_2, \quad (5.37)$$

где

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} E^\dagger \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \times E &= \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} H & Ke^{-i\delta} \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iKe^{i\delta} \\ iH \end{pmatrix} = -iHKe^{i\delta} + iHKe^{-i\delta} = 2HK \sin \delta = S_3. \end{aligned}$$

Запишем это в виде

$$E^\dagger \times A_4 \times E = S_3, \quad (5.38)$$

где

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведенные уравнения (5.35)–(5.38) позволяют представить каждый из четырех параметров Стокса в виде «матричного сэндвича». Три матрицы A_2 , A_3 и A_4 тесно связаны со спиновыми матрицами Паули⁵.

Представление «матричных сэндвичей» через элементы матрицы Мюллера и Джексона

Использование матричных элементов Мюллера. Первое уравнение, определяющее матричные элементы Мюллера, записывается в виде

$$S_0^{(1)} = M_{11}S_0^{(0)} + M_{12}S_1^{(0)} + M_{13}S_2^{(0)} + M_{14}S_3^{(0)}.$$

Воспользовавшись выражениями, полученными в предыдущем пункте, для параметров Стокса через элементы вектора Джексона, можем записать

$$\begin{aligned} E_1^\dagger \times A_1 \times E_1 &= (M_{11} \times E_0^\dagger \times A_1 \times E_0) + (M_{12} \times E_0^\dagger \times A_2 \times E_0) + \\ &+ (M_{13} \times E_0^\dagger \times A_3 \times E_0) + (M_{14} \times E_0^\dagger \times A_4 \times E_0) = \\ &= E_0^\dagger \times [M_{11}A_1 + M_{12}A_2 + M_{13}A_3 + M_{14}A_4] \times E_0. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для A -матриц и производя упрощающие преобразования, последнее уравнение можно записать в виде

$$E_1^\dagger \times A_1 \times E_1 = E_0^\dagger \times \begin{pmatrix} M_{11} + M_{12} & M_{13} - iM_{14} \\ M_{13} + iM_{14} & M_{11} - M_{12} \end{pmatrix} \times E_0. \quad (5.39)$$

⁵Матрицы Паули – это набор из трёх эрмитовых и одновременно унитарных 2×2 матриц, составляющий базис в пространстве всех эрмитовых 2×2 матриц с нулевым следом. Были предложены В.Паули для описания спина электрона в квантовой механике.

Остальные три определяющих уравнения для матричных элементов Мюллера получаются аналогично

$$E_1^\dagger \times A_2 \times E_1 = E_0^\dagger \times \begin{pmatrix} M_{21} + M_{22} & M_{23} - iM_{24} \\ M_{23} + iM_{24} & M_{21} - M_{22} \end{pmatrix} \times E_0,$$

$$E_1^\dagger \times A_3 \times E_1 = E_0^\dagger \times \begin{pmatrix} M_{31} + M_{32} & M_{33} - iM_{34} \\ M_{33} + iM_{34} & M_{31} - M_{32} \end{pmatrix} \times E_0,$$

$$E_1^\dagger \times A_4 \times E_1 = E_0^\dagger \times \begin{pmatrix} M_{41} + M_{42} & M_{43} - iM_{44} \\ M_{43} + iM_{44} & M_{41} - M_{42} \end{pmatrix} \times E_0.$$

Использование матричных элементов Джонса. Для матрицы Джонса определяющим уравнением является $E_1 = JE_0$. Переходя к эрмитово-сопряженным матрицам в обеих частях этого уравнения, получаем E_1^\dagger . Далее, транспонированное произведение двух сомножителей есть произведение двух транспонированных сомножителей, взятых в обратном порядке. Поскольку операция перехода к эрмитово-сопряженной матрице просто эквивалентна комплексному сопряжению транспонированной матрицы, то аналогичная теорема имеет место и для эрмитово-сопряженных матриц. Таким образом, $E_1^\dagger = E_0^\dagger \times J^\dagger$.

Следовательно (вставляя единичную матрицу A_1 в соответствии с последними соотношениями), имеем

$$E_1^\dagger \times A_1 \times E_1 = (E_0^\dagger \times J^\dagger) \times A_1 \times (J \times E_0) = E_0^\dagger \times (J^\dagger \times A_1 \times J) \times E_0. \quad (5.40)$$

Здесь мы воспользовались свойством ассоциативности матричного умножения. Аналогично можно получить следующие равенства:

$$E_1^\dagger \times A_2 \times E_1 = E_0^\dagger \times (J^\dagger \times A_2 \times J) \times E_0,$$

$$E_1^\dagger \times A_3 \times E_1 = E_0^\dagger \times (J^\dagger \times A_3 \times J) \times E_0,$$

$$E_1^\dagger \times A_4 \times E_1 = E_0^\dagger \times (J^\dagger \times A_4 \times J) \times E_0.$$

Попарное сравнение «матричных сэндвичей» в двух методах расчета

Левые части уравнений (5.39) и (5.40) совпадают; следовательно, должны быть равны между собой и правые части. И в том и в другом случае в правой части стоит выражение

$$E_0^\dagger \times (\text{Некоторая матрица}) \times E_0.$$

Поскольку обе правые части этих двух уравнений равны между собой, то должны быть равны друг другу и матрицы, «зажатые» между E_0^\dagger и E_0 . То же самое можно сказать и относительно «зажатых» матриц в остальных аналогичных уравнениях.

«Зажатой» матрицей в уравнении (5.40) является матрица $(J^\dagger \times A_1 \times J)$. Поскольку матрица $J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$, то ее эрмитово-сопряженная $J^\dagger = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}$, где элементы $G_{jk} = J_{jk}^*$ определяются как комплексно сопряженные элементы.

Таким образом, в (5.40) «зажатая» матрица имеет вид

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} G_{11}J_{11} + G_{21}J_{21} & G_{11}J_{12} + G_{21}J_{22} \\ G_{12}J_{11} + G_{22}J_{21} & G_{12}J_{12} + G_{22}J_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Каждый элемент последней матрицы теперь можно приравнять соответствующему ему элементу «зажатой» матрицы в уравнении (5.39). Следовательно,

$$M_{11} + M_{12} = G_{11}J_{11} + G_{21}J_{21}, \tag{5.41}$$

$$M_{13} - iM_{14} = G_{11}J_{12} + G_{21}J_{22}, \tag{5.42}$$

$$M_{13} + iM_{14} = G_{12}J_{11} + G_{22}J_{21}, \tag{5.43}$$

$$M_{11} - M_{12} = G_{12}J_{12} + G_{22}J_{22}. \tag{5.44}$$

Действуя точно так же с другими парами «зажатых» матриц, получаем

$$M_{21} + M_{22} = G_{11}J_{11} - G_{21}J_{21}, \quad (5.45)$$

$$M_{23} - iM_{24} = G_{11}J_{12} - G_{21}J_{22}, \quad (5.46)$$

$$M_{23} + iM_{24} = G_{12}J_{11} - G_{22}J_{21}, \quad (5.47)$$

$$M_{21} - M_{22} = G_{12}J_{12} - G_{22}J_{22}. \quad (5.48)$$

$$M_{31} + M_{32} = G_{11}J_{21} + G_{21}J_{11}, \quad (5.49)$$

$$M_{33} - iM_{34} = G_{11}J_{22} + G_{21}J_{12}, \quad (5.50)$$

$$M_{33} + iM_{34} = G_{12}J_{21} + G_{22}J_{11}, \quad (5.51)$$

$$M_{31} - M_{32} = G_{12}J_{22} + G_{22}J_{12}. \quad (5.52)$$

$$M_{41} + M_{42} = i(G_{21}J_{11} - G_{11}J_{21}), \quad (5.53)$$

$$M_{43} - iM_{44} = i(G_{21}J_{12} - G_{11}J_{22}), \quad (5.54)$$

$$M_{43} + iM_{44} = i(G_{22}J_{11} - G_{12}J_{21}), \quad (5.55)$$

$$M_{41} - M_{42} = i(G_{22}J_{12} - G_{12}J_{22}). \quad (5.56)$$

Выражения для элементов матрицы Мюллера через элементы матрицы Джонса

Теперь нетрудно выразить матричные элементы Мюллера через матричные элементы Джонса. Для этого нужно только сложить или вычесть одно из другого соответствующие пары уравнений, входящие в набор (5.41–5.56). Таким образом,

$$(5.41) + (5.44) \quad M_{11} = (G_{11}J_{11} + G_{21}J_{21} + G_{12}J_{12} + G_{22}J_{22})/2, \quad (5.57)$$

$$(5.41) - (5.44) \quad M_{12} = (G_{11}J_{11} + G_{21}J_{21} - G_{12}J_{12} - G_{22}J_{22})/2, \quad (5.58)$$

$$(5.42) + (5.43) \quad M_{13} = (G_{11}J_{12} + G_{21}J_{22} + G_{12}J_{11} + G_{22}J_{21})/2, \quad (5.59)$$

$$(5.42) - (5.43) \quad M_{14} = i(G_{11}J_{12} + G_{21}J_{22} - G_{12}J_{11} - G_{22}J_{21})/2, \quad (5.60)$$

$$(5.45) + (5.48) \quad M_{21} = (G_{11}J_{11} + G_{12}J_{12} - G_{21}J_{21} - G_{22}J_{22})/2, \quad (5.61)$$

$$(5.45) - (5.48) \quad M_{22} = (G_{11}J_{11} + G_{22}J_{22} - G_{21}J_{21} - G_{12}J_{12})/2, \quad (5.62)$$

$$(5.46) + (5.47) \quad M_{23} = (G_{12}J_{11} + G_{11}J_{12} - G_{22}J_{21} - G_{21}J_{22})/2, \quad (5.63)$$

$$(5.46) - (5.47) \quad M_{24} = i(G_{11}J_{12} + G_{22}J_{21} - G_{21}J_{22} - G_{12}J_{11})/2, \quad (5.64)$$

$$(5.49) + (5.52) \quad M_{31} = (G_{11}J_{21} + G_{22}J_{11} + G_{12}J_{22} + G_{22}J_{12})/2, \quad (5.65)$$

$$(5.49) - (5.52) \quad M_{32} = (G_{11}J_{21} + G_{21}J_{11} - G_{12}J_{22} - G_{22}J_{12})/2, \quad (5.66)$$

$$(5.50) + (5.51) \quad M_{33} = (G_{11}J_{22} + G_{21}J_{12} + G_{12}J_{21} + G_{22}J_{11})/2, \quad (5.67)$$

$$(5.51) - (5.50) \quad M_{34} = i(G_{11}J_{22} + G_{21}J_{12} - G_{12}J_{21} - G_{22}J_{11})/2, \quad (5.68)$$

$$(5.53) + (5.56) \quad M_{41} = i(G_{21}J_{11} + G_{22}J_{12} - G_{11}J_{21} - G_{12}J_{22})/2, \quad (5.69)$$

$$(5.53) - (5.56) \quad M_{42} = i(G_{21}J_{11} + G_{12}J_{22} - G_{11}J_{21} - G_{12}J_{22})/2, \quad (5.70)$$

$$(5.54) + (5.55) \quad M_{43} = i(G_{21}J_{12} + G_{22}J_{11} - G_{11}J_{22} - G_{12}J_{21})/2, \quad (5.71)$$

$$(5.55) - (5.54) \quad M_{44} = (G_{22}J_{11} + G_{11}J_{22} - G_{12}J_{21} - G_{21}J_{12})/2. \quad (5.72)$$

Получение выражений для элементов матрицы Джонса через элементы матрицы Мюллера

Элементы матрицы Джонса в общем случае комплексны, и нужно находить выражения как для действительной, так и для

мнимой частей этих элементов. При выводе оказывается удобным пользоваться полярным представлением комплексных матричных элементов, т. е. комплексное число, например $X + iY$, записывать в виде $Re^{i\theta}$, где $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, а $\text{tg}\theta = Y/X$. Следовательно, комплексно сопряженное число $X - iY$ записывается как $Re^{-i\theta}$. Таким образом, вместо J_{11} имеем $R_{11}e^{i\theta_{11}}$ и т. д. Следовательно, $G_{11}J_{11} = R_{11}e^{-i\theta_{11}}R_{11}e^{i\theta_{11}} = R_{11}^2$ и т. д. [4].

Складывая уравнения (5.41) и (5.45), имеем

$$M_{11} + M_{21} + M_{12} + M_{22} = 2G_{11}J_{11} = 2R_{11}^2.$$

Следовательно,

$$R_{11} = \sqrt{(M_{11} + M_{21} + M_{12} + M_{22})/2}.$$

Аналогично, вычитая (5.45) из уравнения (5.41), получаем

$$R_{21} = \sqrt{(M_{11} + M_{12} - M_{21} - M_{22})/2}.$$

Складывая уравнения (5.44) и (5.48), приходим к

$$R_{12} = \sqrt{(M_{11} - M_{12} + M_{21} - M_{22})/2}.$$

Вычитая (5.48) из (5.44), получаем

$$R_{22} = \sqrt{(M_{11} - M_{21} - M_{12} + M_{22})/2}.$$

Таким образом, мы нашли модули матричных элементов Джонса. Что касается аргументов, то достаточно определить разности между одним из них, выбранным произвольно, и остальными тремя аргументами. Дело в том, что увеличение на одну и ту же величину аргументов всех четырех элементов матрицы Джонса означает просто прибавление этой величины к ωt в правых частях уравнений (5.35) и (5.36), т.е. введение добавочной фазы ϕ , что, как уже отмечалось, никоим образом не сказывается на интенсивностях.

Складывая уравнения (5.59) и (5.63), имеем

$$M_{13} + M_{23} = G_{11}J_{12} + G_{12}J_{11} = R_{11}R_{12}e^{-i\theta_{11}}e^{i\theta_{12}} + R_{11}R_{12}e^{i\theta_{11}}e^{-i\theta_{12}} =$$

$$= R_{11}R_{12}[e^{i(\theta_{11}-\theta_{12})} + e^{-i(\theta_{11}-\theta_{12})}] = R_{11}R_{12}2 \cos(\theta_{11} - \theta_{12}).$$

Следовательно,

$$\cos(\theta_{11} - \theta_{12}) = \frac{M_{13} + M_{23}}{2R_{11}R_{12}} = \frac{M_{13} + M_{23}}{\sqrt{(M_{11} + M_{21})^2 - (M_{12} + M_{22})^2}}.$$

Складывая (5.60) и (5.64), имеем

$$\begin{aligned} M_{14} + M_{24} &= i(G_{11}J_{12} - G_{12}J_{11}) = iR_{11}R_{12}[e^{-i\theta_{11}}e^{i\theta_{12}} - e^{i\theta_{11}}e^{-i\theta_{12}}] = \\ &= iR_{11}R_{12}[e^{i(\theta_{12}-\theta_{11})} - e^{-i(\theta_{12}-\theta_{11})}] = R_{11}R_{12}2 \sin(\theta_{11} - \theta_{12}), \end{aligned}$$

откуда, как и выше, находим

$$\sin(\theta_{11} - \theta_{12}) = \frac{M_{14} + M_{24}}{\sqrt{(M_{11} + M_{21})^2 - (M_{12} + M_{22})^2}}.$$

Для того чтобы полностью определить угол в интервале от 0 до 2π , достаточно знать лишь $\sin(\theta_{11} - \theta_{12})$ и $\cos(\theta_{11} - \theta_{12})$. Комбинируя соответствующим образом уравнения из этого пункта, можно таким же способом найти выражения для синусов и косинусов от разностей между θ_{11} и двумя другими аргументами матричных элементов Джонса. Складывая (5.65) и (5.66), получаем

$$\cos(\theta_{21} - \theta_{11}) = \frac{M_{13} + M_{32}}{\sqrt{(M_{11} + M_{12})^2 - (M_{21} + M_{22})^2}},$$

а путем сложения уравнений (5.69) и (5.70) находим

$$\sin(\theta_{21} - \theta_{11}) = \frac{M_{41} + M_{42}}{\sqrt{(M_{11} + M_{12})^2 - (M_{21} + M_{22})^2}}.$$

Сложение уравнений (5.67) и (5.72) дает

$$\cos(\theta_{11} - \theta_{22}) = \frac{M_{33} + M_{44}}{\sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 - (M_{21} + M_{12})^2}},$$

а вычитая (5.68) из уравнения (5.71), имеем

$$\sin(\theta_{22} - \theta_{11}) = \frac{M_{43} - M_{34}}{\sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 - (M_{21} + M_{12})^2}}.$$

Во всех этих десяти уравнениях следует брать положительные значения квадратного корня, представляющие величины R_{jk} .

При пользовании формулами обращения необходимо соблюдать некоторую осторожность, поскольку матрица Мюллера с ее шестнадцатью действительными элементами не всегда может быть выражена через матрицу Джонса, содержащую лишь четыре действительных и четыре мнимых элемента. Можно показать, что для любой матрицы Джонса, которая только может быть выписана, существует физически реализуемый поляризационный прибор и, стало быть, существует соответствующая ему матрица Мюллера. С другой стороны, если шестнадцать произвольно выписанных чисел образуют матрицу Мюллера, то может оказаться, что нельзя решить уравнения этого пункта, не получив мнимых значений для величин, которые по определению должны быть действительными, т. е. для величин R и разностей фаз θ . Даже в том случае, когда все подкоренные выражения положительны, уравнения могут предсказать недопустимые пары значений для косинусов и синусов, сумма квадратов которых не равна единице. Так происходит, например, если рассматривается матрица Мюллера для «идеального деполяризатора», у которого $M_{11} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Без процесса усреднения по времени деполяризовать волну невозможно; прибор физически нереализуем, и для него не существует матрицы Джонса.

§ 8. Примеры использования матриц Джонса и Мюллера

Пример 1

1. Источник испускает плоскополяризованный свет единичной интенсивности, который затем проходит через идеальный линейный поляризатор. Доказать, что интенсивность света, прошедше-

го через поляризатор, равна $\cos^2 \theta$, где θ – угол поворота поляризатора, измеряемый от положения максимального пропускания.

2. Пусть поляризатор установлен так, чтобы полностью погасить проходящий луч; затем между источником и первым поляризатором ставят второй поляризатор. Показать, что в этом случае часть света может проходить через оба поляризатора и что интенсивность проходящего света пропорциональна $\sin^2 2\theta$, где θ – угол поворота второго поляризатора, измеряемый от положения, при котором происходит полное гашение луча света [4].

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся как методом Джонса, так и методом Мюллера.

а. Сначала применим метод Джонса. Пусть падающий пучок света линейно-поляризован в горизонтальной плоскости, так что его вектор Джонса имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Джонса поляризатора, плоскость пропускания которого образует угол θ с осью x , записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

следовательно, для пучка, прошедшего через поляризатор, вектор Джонса будет равен

$$E_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \cos^2 \theta \\ H \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Интенсивность прошедшего пучка мы найдем, умножая вектор Джонса этого пучка слева на комплексно сопряженный ему транспонированный вектор, как было описано выше. Для интенсивности имеем

$$E_2^\dagger E_2 = \begin{pmatrix} H \cos^2 \theta & H \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \cos^2 \theta \\ H \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$= H^2 \cos^4 \theta + H^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = H^2 \cos^2 \theta = \cos^2 \theta.$$

б. По условию $H^2 = 1$. Для нулевой интенсивности должно выполняться условие $\theta = \pi/2$.

Предположим, что пучок проходит через другой поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна, так что соответствующая матрица Джонса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор Джонса луча на выходе поляризатора тогда определяется следующим образом:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \cos^2 \theta \\ H \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Для получения интенсивности умножаем

$$E_3^\dagger E_3 = H^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta.$$

Таким образом, существуют четыре ориентации промежуточного поляризатора, при которых происходит полное гашение пучка света.

Теперь решим ту же самую задачу, используя метод Мюллера. Пусть исходный пучок света является также линейно-поляризованным, причем его плоскость поляризации параллельна оси x . Вектор Стокса для такого пучка имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая этот вектор Стокса на матрицу Мюллера поляризатора, плоскость пропускания которого повернута на угол θ относительно оси x (см. табл. 5.3), находим вектор Стокса для пучка,

прошедшего через первый поляризатор:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\theta \\ \cos 2\theta + \cos^2 2\theta \\ \sin 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Интенсивность на выходе поляризатора равна (первый элемент столбца) $(1 + \cos 2\theta)/2 = \cos^2 \theta$.

Теперь пропустим исходный пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна: $\theta = 90^\circ$. Умножая вектор Стокса падающего луча на соответствующую матрицу Мюллера, имеем на выходе поляризатора следующий вектор Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\theta \\ \cos 2\theta + \cos^2 2\theta \\ \sin 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos^2 2\theta \\ \cos^2 2\theta - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а интенсивность пучка на выходе равна $(1 - \cos^2 2\theta)/4 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$.

Пример 2

Три поляризатора установлены последовательно, так что пучок света по очереди проходит через каждый из них. Найти отношение интенсивностей прошедшего света к падающему, если плоскость пропускания первого поляризатора вертикальна, плоскость пропускания второго повернута на угол 12° вправо от вертикали,

если смотреть на источник света, и плоскость пропускания третьего поляризатора повернута на угол 12° влево от вертикали.

Решение. Мы решим эту задачу, используя параметры Стокса и матрицы Мюллера, поскольку метод Джонса нельзя применять при решении задач с участием *неполяризованного* света. Сначала рассмотрим неполяризованный свет, для которого вектор Стокса имеет вид

$$\{ 1, 0, 0, 0 \}.$$

Пропустим сперва этот пучок через поляризатор, плоскость пропускания которого вертикальна, т. е. $\theta = 90^\circ$. Тогда для вектора Стокса на выходе получаем

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку теперь мы имеем вертикально поляризованный луч света, то, начиная с этого этапа вычислений, можно использовать далее метод Джонса, учитывая тот факт, что 50% интенсивности входного пучка были поглощены в первом поляризаторе.

Затем пучок проходит через второй поляризатор, плоскость пропускания которого повернута на угол 12° вправо от вертикали, так что $\theta = 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$. При этом получим $\cos 2\theta = -0.91$ и $\sin 2\theta = 0.41$. Для пучка света, прошедшего через второй поляризатор, вектор Стокса находим умножением вектора Стокса для пучка на выходе первого поляризатора на матрицу Мюллера второго поляризатора:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -0.91 & ? & ? \\ -0.91 & 0.83 & ? & ? \\ 0.41 & -0.37 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1.91 \\ -1.74 \\ 0.78 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что в матрице Мюллера несколько матричных элементов заменены вопросительными знаками. Это связано

с тем, что вектор Стокса для пучка на входе поляризатора содержит всего лишь два не равных нулю элемента, расположенных в верхней части столбца; следовательно, элементы в двух правых столбцах матрицы Мюллера будут умножаться на нулевые элементы вектора Стокса, давая нули. Поскольку результат никак не будет зависеть от значений этих элементов, нет смысла расписывать их в процессе вычислений.

Наконец, пучок проходит через последний поляризатор, плоскость пропускания которого повернута на угол 12° влево относительно вертикали, т. е. $\theta = 102^\circ$, $\cos 2\theta = -0.91$ и $\sin 2\theta = -0.41$. Вектор Стокса луча, прошедшего через систему, определяется выражением

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -0.91 & -0.41 & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1.91 \\ -1.74 \\ 0.78 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3.17 \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}.$$

Таким образом, интенсивность пучка на выходе системы равна $3.17/8 = 0.396$ (интенсивность исходного пучка принимается равной единице). Здесь снова мы заменили вопросительными знаками все матричные элементы в нижних трех строках матрицы Мюллера. Это можно сделать вследствие того, что нас интересует только интенсивность пучка, прошедшего через поляризатор, поэтому нет смысла вычислять все остальные элементы вектора Стокса, за исключением первого.

Пример 3

Рассмотрим пучок эллиптически поляризованного света с правым вращением плоскости поляризации, описываемый выражениями

$$E_x = \tilde{E}_x \cos \omega t \text{ и } E_y = \tilde{E}_y \cos(\omega t + \delta).$$

Найти угол, который образуют оси этого эллипса с осью x , и отношение длин осей эллипса.

Решение. Эллиптическую поляризацию в самом общем случае можно представить вектором Джонса $\begin{pmatrix} \cos \psi \\ e^{i\delta} \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K e^{i\delta} \end{pmatrix}$. Считая интенсивность пучка $I = 1$, в обычных обозначениях имеем $H = \cos \psi$ и $K = \sin \psi$ (ψ – угол наклона эллипса); следовательно, параметры Стокса записываются в виде

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \cos 2\psi, \quad S_2 = \sin 2\psi \cos \delta, \quad S_3 = \sin 2\psi \sin \delta.$$

Предположим, что теперь луч проходит через поляризатор, плоскость пропускания которого образует угол α с осью x . Вектор Стокса для пучка на выходе этого поляризатора имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \cos \delta \\ \sin 2\theta \sin \delta \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\theta \cos 2\alpha + \sin 2\theta \cos \delta \sin 2\alpha \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, если положить $2\alpha = \beta$, то можно показать, что интенсивность пучка, прошедшего через поляризатор, прямо пропорциональна величине

$$E = 1 + \cos 2\psi \cos \beta + \sin 2\psi \cos \delta \sin \beta.$$

При вращении поляризатора значения β меняются и соответствующим образом меняется интенсивность. Когда плоскость пропускания поляризатора совпадает с одной из осей эллипса, интенсивность становится либо максимальной, либо минимальной. Следовательно, мы можем найти ориентацию осей эллипса, приравняв нулю производную интенсивности по β . Эта производная дается выражением

$$\frac{dE}{d\beta} = -\cos 2\psi \sin \beta + \sin 2\psi \cos \delta \cos \beta.$$

Максимум или минимум интенсивности имеет место в точках, где $dE/d\beta = 0$, т. е. когда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin 2\psi \cos \delta}{\cos 2\psi} = \operatorname{tg} 2\psi \cos \delta.$$

Если найти два решения этого уравнения относительно величины $\beta = 2\alpha$, различающихся на 180° , то соответствующие значения α будут различаться на 90° . Эти значения и определяют ориентацию осей эллипса. Обозначая одно решение α , а другое α' , получаем

$$\alpha' = \alpha + 90^\circ,$$

т.е.

$$\beta' = 2\alpha = \beta + 180^\circ.$$

Следовательно,

$$\sin \beta' = -\sin \beta \quad \text{и} \quad \cos \beta' = -\cos \beta.$$

Интенсивность пучка, прошедшего через поляризатор, угол ориентации которого соответствует второму решению, равна

$$E' = 1 - \cos 2\psi \cos \beta - \sin 2\psi \cos \delta \sin \beta.$$

Таким образом, отношение интенсивностей, которое равно отношению квадратов осей эллипса, записывается в виде

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \cos 2\psi \cos \beta - \sin 2\psi \cos \delta \sin \beta}{1 + \cos 2\psi \cos \beta + \sin 2\psi \cos \delta \sin \beta}.$$

Используя известные значения $\operatorname{tg} \beta$, получаем значения $\cos \beta$ и $\sin \beta$. Подставляя их в это уравнение и производя соответствующие упрощения, получаем окончательный результат:

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\psi \sin^2 \delta}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\psi \sin^2 \delta}}.$$

Рекомендуется в качестве упражнения решить эту задачу методом Джонса. Попутно мы получили некоторые результаты относительно геометрических характеристик эллипса, которые достаточно трудно получить обычными геометрическими методами.

Пример 4

Эллиптически поляризованный свет пропускают через четвертьволновую пластинку, а затем через поляризатор. Свет полностью гасится, когда быстрая ось пластинки и плоскость пропускания поляризатора образуют с горизонталью углы 30° и 60° соответственно. Углы отсчитываются в одном и том же направлении. Найти ориентацию эллипса и отношение его осей.

Решение. Если подставить данные значения углов в стандартные формулы матриц Джонса для поляризатора и четвертьволновой пластинки, то получим матрицу системы, состоящей из четвертьволновой пластинки, и установленного последовательно за ней поляризатора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3-i & \sqrt{3}(1+i) \\ \sqrt{3}(1+i) & 1-3i \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3+i & \sqrt{3}(1-i) \\ \sqrt{3}(3+i) & 3-3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть вектор Джонса для входного пучка имеет вид

$$\begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Принимая интенсивность этого пучка равной единице, имеем в принятых обозначениях $H = \cos \psi$ и $K = \sin \psi$. Следовательно, вектор Джонса принимает вид

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Поскольку свет на выходе системы гасится, то оба элемента вектора Джонса для пучка, прошедшего через систему, должны быть равны нулю, т. е.

$$\begin{pmatrix} 3+i & \sqrt{3}(1-i) \\ \sqrt{3}(3+i) & 3-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{i\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что мы имеем квадратную матрицу размерности 2×2 , умноженную на такой вектор, что в результате получается нулевой вектор-столбец:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, $AX + BY = 0$ и $CX + DY = 0$. Считая, что для эллиптически-поляризованного света ни X , ни Y не обращаются в нуль, из этих уравнений мы сразу получаем

$$\frac{X}{Y} = -\frac{B}{A} = -\frac{D}{C}.$$

В нашей задаче $B = \sqrt{3}(1-i)$ и $A = 3+i$, откуда

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{3+i} = \frac{\sqrt{3}(1-i)(1+i)}{(3+i)(1+i)} = \frac{2\sqrt{3}}{2+4i} = \frac{\sqrt{3}}{1+2i}.$$

Заметим, что D/C имеет то же самое значение. Следовательно,

$$\frac{\cos \psi}{\sin \psi e^{i\delta}} = \frac{X}{Y} = -\frac{B}{A} = -\frac{\sqrt{3}}{1+2i}.$$

Таким образом, обращая последнее равенство, имеем

$$\operatorname{tg} \psi \cos \delta + i \operatorname{tg} \psi \sin \delta = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}i.$$

Приравнивая действительные части, получаем

$$\operatorname{tg} \psi \cos \delta = -1/\sqrt{3},$$

а, приравнивая мнимые части, —

$$\operatorname{tg}\psi \sin \delta = -2/\sqrt{3}.$$

Далее разделим второе уравнение на первое и сократим $\operatorname{tg}\psi$. В результате находим $\operatorname{tg}\delta = \sin \delta / \cos \delta = 2$, откуда $\delta = 63^\circ 26'$. Уравнение, полученное выше приравниванием действительных частей, дает

$$\operatorname{tg}\psi = -1.292.$$

или $\psi = -52^\circ 16'$. Используя формулы, полученные в предыдущей задаче,

$$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}2\psi \cos \delta$$

и

$$(\text{отношение осей})^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\psi \sin^2 \delta}}{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\psi \sin^2 \delta}},$$

находим, что $\alpha' = 30^\circ$ (угол между малой осью эллипса и осью x), а длины осей относятся как $\sqrt{3} : 1$.

Пример 5

Пучок света с правой круговой поляризацией падает нормально на фазовую пластинку, быстрая ось которой вертикальна. Описать состояние поляризации света, прошедшего через пластинку, если пластинка является: а) четвертьволновой пластинкой; б) пластинкой с фазовым сдвигом $\lambda/8$.

Решение. В случае циркулярно-поляризованного пучка света компоненты H и K равны. Для правополяризованного света разность фаз между компонентами напряженности электрического поля $\delta = 90^\circ$, и, следовательно, нормированный вектор Джонса записывается в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

а. Матрицу Джонса для четвертьволновой пластинки, быстрая ось которой вертикальна, записывают следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор Джонса на выходе четвертьволновой пластинки определяется выражением

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Второй элемент этого вектора является действительным числом, так что для пучка на выходе $\sin \delta$ должен быть равен нулю, т. е. $\delta = 0$ или π . Поскольку действительная компонента отрицательна, δ должно быть равно π . Таким образом, $K = H = 1$. Следовательно, прошедший через пластинку свет становится линейно-поляризованным, причем плоскость поляризации образует угол -45° с осью x и проходит через второй и четвертый квадранты.

Используя матрицу Мюллера для четвертьволновой пластинки и вектор Стокса луча с правой круговой поляризацией, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор Стокса выходящего луча отвечает, линейно-поляризованному лучу с углом 135° к оси x .

Результаты вычислений обоими методами совпадают.

б. Для пластинки $\lambda/8$ разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами равна 45° и $\cos \delta = \sin \delta = 1/\sqrt{2}$. По условию задачи $\varphi = 90^\circ$ и матрицу Джонса можно записать в виде (см. табл. 4.1):

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор Джонса для пучка на выходе дается выражением

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}.$$

Вектор Джонса в общем виде имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x (\cos \delta_x + i \sin \delta_x) \\ A_y (\cos \delta_y + i \sin \delta_y) \end{pmatrix},$$

приравниваем действительные и мнимые части и получаем

$$A_x \cos \delta_x = 1/2, \quad A_x \sin \delta_x = -1/2, \quad A_y \cos \delta_y = 0, \quad A_y \sin \delta_y = 1/\sqrt{2}.$$

Вычисляя отношение действительной и мнимой частей, находим $\delta_x = -45^\circ$, $\delta_y = 90^\circ$, $A_x = 1/\sqrt{2}$, $A_y = 1/\sqrt{2}$, следовательно, $\delta = \delta_y - \delta_x = 135^\circ$.

Записывая уравнение эллипса в стандартной форме

$$\frac{x^2}{A_x^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \delta + \frac{y^2}{A_y^2} = \sin^2 \delta,$$

находим

$$x^2 - \sqrt{2}xy + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Поскольку δ может принимать значения в интервале $0-180^\circ$, свет поляризован эллиптически с правым вращением.

Этот же результат получается при использовании матрицы Мюллера

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Вектор Стокса произвольного луча правой эллиптической поляризации в общем виде запишется в виде

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \delta \\ \sin 2\alpha \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Покомпонентное сравнение вектора Стокса выходящего из пластинки луча с вектором Стокса в общем виде дает $\delta = -45^\circ$.

Уравнение эллипса поляризации записывают через компоненты вектора Стокса в форме:

$$\frac{2x^2}{I+Q} - \frac{4Uxy}{I^2-Q^2} + \frac{2y^2}{I-Q} = \frac{V^2}{I^2-Q^2}.$$

Поэтому

$$x^2 - \sqrt{2}xy + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Пример 6

Волна, описываемая выражениями $x = A \cos(\omega t + \pi/4)$ и $y = A \cos \omega t$, падает на поляризатор, который вращают до тех пор, пока интенсивность света, прошедшего через него, не становится максимальной.

а. Как в этом случае ориентирована плоскость пропускания поляризатора?

б. Вычислить отношение интенсивностей пучков, прошедших через поляризатор, ориентированный в первом случае так, как описано выше, а во втором случае так, что его плоскость пропускания параллельна оси y .

Решение. Мы можем найти интенсивность прошедшего луча для произвольной ориентации поляризатора, используя либо матрицы Мюллера, либо матрицы Джонса. Согласно методу Мюллера мы имеем $H = A$, $K = A$, $\delta = -\pi/4$. Следовательно,

$$S_0 = 2A^2, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 2A^2 \cos \frac{\pi}{4}, \quad S_3 = -2A^2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

Пропустим луч через поляризатор, ориентированный под углом θ , и найдем его интенсивность на выходе. Следует заметить, что нужно использовать только первую строку матрицы Мюллера поляризатора, так как результирующая интенсивность определяет-

ся первым элементом вектора из произведения

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2A^2 \\ 0 \\ \sqrt{2}A^2 \\ -\sqrt{2}A^2 \end{pmatrix},$$

который равен

$$A^2 \left(1 + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}} \right).$$

а. Очевидно, это выражение имеет максимум, когда $\sin 2\theta = 1$, т. е. когда $\theta = 45^\circ$, причем максимальное значение интенсивности равно

$$A^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

б. Когда плоскость пропускания поляризатора параллельна оси y , т. е. $\theta = 90^\circ$, и, следовательно, $\sin 2\theta = 0$, интенсивность равна A^2 . Таким образом, мы имеем следующее отношение интенсивностей:

$$1.707 : 1.$$

Если для вычисления интенсивности использовать метод Джонса, сначала нужно написать вектор Джонса для входного пучка, а именно

$$\begin{pmatrix} A \\ Ae^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}.$$

После прохождения света через поляризатор, ориентированный под углом θ , вектор Джонса принимает вид

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем интенсивность луча, умножая этот вектор Джонса на комплексно сопряженный ему транспонированный вектор. Имеем тот же результат

$$I = A^2 \left(1 + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}} \right).$$

Пример 7

Эллиптически-поляризованный свет с правым вращением плоскости поляризации описывается эллипсом, характеризуемым большой осью H и малой осью K . Этот световой пучок проходит через поляризатор, плоскость пропускания которого ориентирована под углом α относительно большой оси эллипса.

Доказать, что интенсивность пучка, прошедшего через поляризатор, дается выражением

$$I = H^2 \cos^2 \alpha + K^2 \sin^2 \alpha.$$

Решение. Если считать, что большая ось эллипса горизонтальна, то вектор Джонса для падающего пучка можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} H \\ Ke^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ iK \end{pmatrix}.$$

Умножая этот вектор на матрицу Джонса поляризатора, находим вектор Джонса на выходе поляризатора:

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ iK \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \cos^2 \alpha + iK \sin \alpha \cos \alpha \\ H \sin \alpha \cos \alpha + iK \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Произведение вектора Джонса на комплексно сопряженный ему транспонированный вектор дает выражение для интенсивности, после умножения и упрощения полученного выражения найдем искомый результат.

Интересно отметить, что этот результат легко проверить экспериментально, используя для измерения интенсивности фотоэлемент; таким образом, мы получаем прямое подтверждение теорий эллиптически-поляризованного света. Эти результаты можно также получить, хотя и не столь просто, рассматривая геометрию эллипса в соответствующих координатах.

Заметим, что для пучка света с левым вращением плоскости поляризации вычисления полностью аналогичны, за тем лишь исключением, что знаки при всех мнимых частях (перед i) меняются на противоположные. Однако, поскольку мы ищем произведение сопряженных векторов, эти мнимые члены исчезают.

В этом параграфе мы обсудили лишь часть примеров, а именно: как два формализма могут друг друга взаимозаменять и дополнять. Кроме того, продемонстрировали, что вычисления требуют хороших навыков работы с алгебраическими преобразованиями. На сегодняшний день для решения многих задач поляризационной оптики разработаны пакеты программ, базирующиеся на рассмотренных матричных формализмах.

Глава 6

Методы расчета слоистых структур при известных оптических параметрах материалов

§ 1. Обзор методов

Задача об определении свойств оптической системы при известных оптических (диэлектрическая проницаемость) и геометрических (задающих форму объекта) параметрах является довольно распространенной задачей, называемой прямой задачей. Для решения задачи о прохождении света через слоистую (в общем случае анизотропную) среду в настоящее время применяются различные методы и алгоритмы: классические модели, рассмотренные в работах Борна и Вольфа, Аззама и Башара [18, 19], метод матриц Джонса, рассмотренный ранее, и матричный метод Берремана, о котором пойдет речь ниже. Использование конкретного метода определяется условиями его применимости, при этом расширенный матричный 4x4 метод Джонса и матричный метод Берремана считаются универсальными. Для решения задачи о прохождении света сквозь многослойную структуру используется матричный 4x4 метод Берремана, основанный на уравнениях Максвелла. Соотношение Крамерса-Кронига, связывающее действительную и мнимую части диэлектрического тензора, позволяет устойчиво находить решение обратной задачи об определении индексов диэлектрической проницаемости в классе аналитических функций.

В качестве основных элементов математических моделей используются волновая теория света и уравнения Максвелла. Ключевыми входными параметрами световой волны являются ее поляризация и угол падения, а основными оптическими параметрами материалов, используемыми как в прямой, так и в обратной зада-

че, служат тензор диэлектрической проницаемости ϵ и толщина материала d .

Основными выходными оптическими свойствами в задаче моделирования являются интенсивности пропускания и отражения под разными углами падения. Эти же характеристики обычно выступают как входные параметры в обратной задаче. Кроме того, в качестве дополнительных выходных параметров (рассчитываемых на основе пропускания и отражения) в прямой задаче могут также служить векторы Стокса прошедшего и отраженного света, степень поляризации, фазовые задержки, контраст, эффективность, цветовые координаты в различных цветовых пространствах, цветопередача и многое др.

Заметим, что эффективное решение прямой задачи играет ключевую роль во всем программном обеспечении, поскольку задача расчета параметров материала по измеренным данным (обратная задача) частично использует алгоритмы прямой задачи.

Основными критериями применимости того или иного метода является возможность учета заданных параметров световой волны (поляризация, угол падения) и многократных отражений, возникающих между слоями оптической системы.

При расчете слоистых структур возможно применение расширенного матричного 4×4 метода Джонса и матричного метод Берремана. Однако учет изотропности позволяет использовать более простые и быстрые классические методы расчета, что особенно важно при решении обратной задачи. В этой связи в методиках расчета используются, где возможно:

- *матричный метод Берремана* для материалов любого типа с любой структурой оптической системы (в дальнейшем будем просто называть матричным методом);
- *классический метод* только для изотропных материалов при наличии не более двух слоев;
- *комбинированный метод* для двухслойных оптических систем с толстой изотропной подложкой.

Основные соотношения классического метода для произвольной падающей волны, учитывающего многократные отражения для одного и двух слоев, предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно. Ниже в рамках нашего курса остановимся на матричном методе.

Заметим, что для расчетов, выполняемых в прямой задаче моделирования многослойных структур и устройств, можно использовать матричный метод даже для простых изотропных материалов. Это связано с тем, что матричный метод позволяет рассчитывать более широкий круг параметров прошедшего (отраженного) света, чем классический. Материальные уравнения электромагнитной индукции в декартовой системе координат могут быть записаны как:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 [\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \delta(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \mu_0 [\mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \gamma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)], \end{aligned} \quad (6.1)$$

где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости в вакууме; ε и μ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости материала. Перекрестно-связанные тензоры δ и γ характеризуют магнитоэлектрический эффект. Материал оптически анизотропен, если, по крайней мере, один из тензоров ε или μ много отличается от его главных элементов, тогда как δ и γ могут быть равны нулю. В общем случае все четыре тензора имеют комплексные, несимметричные и не обращающиеся в нуль элементы, представляя собой анизотропную среду. Для однородной среды четыре тензора не зависят от пространственного положения \mathbf{r} .

Рассматриваемый материал может быть определен как изотропный, одноосный или двуосный, а его оптические свойства могут быть описаны при помощи тензора диэлектрической проницаемости, вид которого определяется категорией кристалла.

Оптические параметры большинства твердых тел и жидкостей могут быть определены в понятиях главных элементов тензора ε и углов вращения. Классы кристаллов можно условно поделить на среды с одной или двумя оптическими осями. Магнитооптические эффекты в материале могут быть причиной антисимметрии

диэлектрических свойств, тогда ϵ становится несимметричным в целом. Несимметричный тензор содержит симметричную и антисимметричную части, и обе могут иметь три главных комплексных элемента.

§ 2. Матричный метод Берремана

Наибольшую практическую ценность с точки зрения простоты расчета оптических характеристик сложных анизотропных сред с плоскопараллельными границами раздела представляют матричные способы записи уравнений Максвелла. Один из наиболее широко распространенных матричных методов описания оптических характеристик сложных анизотропных сред известен под названием метода Берремана [20]. Берреман и Шэффер предложили метод комплексных 4×4 матриц для изучения отражения и пропускания поляризованного света, падающего *под углом на слоистые планарные анизотропные структуры*. Впервые этот метод был использован для расчета оптических характеристик таких сложных сред, как ориентированные образцы неоднородных слоев жидких кристаллов, которые представляют собой плавно неоднородную анизотропную систему.

Рассмотрим распространение плоской поляризованной монохроматической волны в анизотропной среде при произвольной взаимной ориентации направления распространения относительно оптической оси среды. Запишем уравнения Максвелла, при этом будем считать, что временная зависимость при описании электромагнитной волны имеет вид $\exp(i\omega t)$ (где i – мнимая единица, ω – циклическая частота электромагнитной волны). С учетом временной зависимости полей два максвелловских уравнения для роторов принимают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} i\omega \mathbf{D}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} i\omega \mathbf{B}, \quad (6.2)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} – векторы световой волны, соответственно напряженности электрического и магнитного полей и индукции электрического и магнитного полей, c – скорость света в вакууме.

Пусть на анизотропную среду с плоскопараллельными границами падает плоская монохроматическая волна под углом к границе раздела. Выберем декартовую систему координат так, чтобы ось z этой системы была перпендикулярна границе раздела двух сред, а оси x и y параллельны этой границе. В этой системе координат уравнения (6.2) можно объединить в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = i\frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

или в краткой записи

$$OG = i\frac{\omega}{c}C,$$

где O – симметричный матричный оператор 6×6 , G – вектор-столбец 6×1 , элементы которого представляют собой компоненты электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} в декартовой системе координат, а C – вектор-столбец 6×1 , элементами которого являются компоненты вектора электрической индукции \mathbf{D} и вектора магнитной индукции \mathbf{B} в декартовой системе координат.

В отсутствие нелинейных оптических эффектов и пространственной дисперсии соотношения между C и G можно записать, используя связь (6.1), следующим образом:

$$C = MG, \quad (6.4)$$

где введена оптическая матрица

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix},$$

ε_{jk} и μ_{jk} – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, а перекрестно-связанные тензоры δ_{jk} и γ_{jk} (учитывают оптическую активность материала), $j, k = 1, 2, 3$. Матрица M 6×6 несет всю информацию об анизотропных оптических свойствах среды, в которой локализованы электромагнитные поля. Здесь матрица M записана в СГСЭ, т.е. ε_0 и μ_0 опущены.

Подставляя (6.4) в (6.3), получаем

$$OG = i \frac{\omega}{c} MG.$$

Если в этом выражении заменить вектор G на

$$G = e^{i\omega t} \Gamma,$$

где Γ – зависящая от пространственных координат часть G , то оно принимает вид

$$O\Gamma = i \frac{\omega}{c} M\Gamma. \quad (6.5)$$

Соотношение (6.5) представляет собой уравнение пространственной волны с частотой ω .

Далее рассматриваем частную задачу об отражении и пропускании монохроматической плоской волны, падающей под углом из изотропной среды ($z < 0$) на анизотропную планарную структуру ($z > 0$), слоистую вдоль оси z . Предполагается, что ось x декартовой системы координат xyz совпадает с линией пересечения плоскости падения (плоскость волнового вектора падающей волны и оси z) и границы раздела $z = 0$. Из симметрии задачи следует, что изменения любых компонент поля в направлении y отсутствуют, так что $\frac{\partial}{\partial y} = 0$.

Для согласования тангенциальных полей на границе $z = 0$ во всех ее точках во все моменты времени все волны, возбужденные падающей плоской волной, должны иметь ту же самую зависимость от x , что и падающая волна. Следовательно, если ζ обозначить x -компоненту волнового вектора падающей волны, то все поля должны изменяться в направлении x как $e^{-i\zeta x}$, откуда имеем $\frac{\partial}{\partial x} = -i\zeta$.

Величина ζ связана с частотой волны, показателем преломления n_0 окружающей среды и углом падения φ_0 соотношением

$$\zeta = \frac{\omega}{c} n_0 \sin \varphi_0. \quad (6.6)$$

Использование выражения (6.6) упрощает элементы матрицы O :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & i\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\zeta & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если введенные матрицы подставить в (6.3), то получим два линейных однородных алгебраических уравнения и четыре линейных однородных дифференциальных уравнения для шести компонент Γ (напряженности и индукции электромагнитного поля без временной части)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & i\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\zeta & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} =$$

$$= i \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}.$$

Два линейных однородных алгебраических уравнения можно решить относительно компонент поля E_z и H_z вдоль оси z , выразив их через другие четыре компоненты полей E_x , E_y , H_x , H_y вдоль

осей x и y . Полученные таким образом значения E_z и H_z следует подставить в оставшиеся четыре дифференциальные уравнения. При этом получаются четыре линейных однородных дифференциальных уравнения первого порядка для четырех компонент полей: E_x, E_y, H_x, H_y . Последние можно записать в виде 4x4 матрицы следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ -H_x \end{pmatrix} = -i \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ -H_x \end{pmatrix}$$

или

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} \Delta \Psi. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) является волновым уравнением для обобщенного 4x1 вектора поля (вектора Берремана)

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ -H_x \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Матрица Δ называется дифференциальной 4x4 матрицей распространения для данной среды. Ее элементы являются функциями элементов оптической 6x6 матрицы M , получаемой с помощью указанных выше операций. Элементы матриц Δ и M связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= M_{51} + (M_{53} + \eta)A_1 + M_{56}A_5, \\ \Delta_{12} &= M_{55} + (M_{53} + \eta)A_4 + M_{56}A_8, \\ \Delta_{13} &= M_{52} + (M_{53} + \eta)A_2 + M_{46}A_6, \\ -\Delta_{14} &= M_{54} + (M_{53} + \eta)A_3 + M_{56}A_7, \\ \Delta_{21} &= M_{11} + M_{13}A_1 + M_{16}A_5, \\ \Delta_{22} &= M_{15} + M_{13}A_4 + M_{16}A_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{23} &= M_{12} + M_{13}A_2 + M_{16}A_6, \\
-\Delta_{24} &= M_{14} + M_{13}A_3 + M_{16}A_7, \\
-\Delta_{31} &= M_{41} + M_{43}A_1 + M_{46}A_5, \\
-\Delta_{32} &= M_{45} + M_{43}A_4 + M_{46}A_8, \\
-\Delta_{33} &= M_{42} + M_{43}A_2 + M_{46}A_6, \\
\Delta_{34} &= M_{44} + M_{43}A_3 + M_{46}A_7, \\
\Delta_{41} &= M_{21} + M_{23}A_1 + (M_{26} - \eta)A_5, \\
\Delta_{42} &= M_{25} + M_{23}A_4 + (M_{26} - \eta)A_8, \\
\Delta_{43} &= M_{22} + M_{23}A_2 + (M_{26} - \eta)A_6, \\
-\Delta_{44} &= M_{24} + M_{23}A_3 + (M_{26} - \eta)A_7,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{M_{61}M_{36} - M_{31}M_{66}}{D}, \quad A_2 = \frac{(M_{62} - \eta)M_{36} - M_{32}M_{66}}{D}, \\
A_3 &= \frac{M_{64}M_{36} - M_{34}M_{66}}{D}, \quad A_4 = \frac{M_{65}M_{36} - (M_{35} + \eta)M_{66}}{D}, \\
A_5 &= \frac{M_{63}M_{31} - M_{33}M_{61}}{D}, \quad A_6 = \frac{M_{63}M_{32} - (M_{62} - \eta)M_{33}}{D}, \\
A_7 &= \frac{M_{63}M_{34} - M_{33}M_{64}}{D}, \quad A_8 = \frac{(M_{35} + \eta)M_{63} - M_{33}M_{65}}{D},
\end{aligned}$$

$$D = M_{33}M_{66} - M_{36}M_{63}, \quad \eta = \zeta/\omega = n_0 \sin \varphi_0/c.$$

Напомним, что оптическая матрица M состоит из компонент тензоров ε_{jk} , μ_{jk} , δ_{jk} и γ_{jk} . Используя эти тензоры, а также величину η , можно с помощью выражений (6.9) рассчитать дифференциальную матрицу распространения Δ . Если матрица Δ известна, то уравнение (6.7) дает закон распространения (волновое уравнение) для обобщенного вектора поля (т.е. x - и y -компонент полей \mathbf{E} и \mathbf{H}).

Берремман рассчитал Δ для ряда частных случаев [20]:

- 1) ромбического кристалла, главные оси которого параллельны осям координат x , y и z ;
- 2) изотропной оптически активной среды;

- 3) изотропной среды, находящейся под действием магнитного поля, приложенного вдоль оси z и обуславливающего эффект Фарадея;
- 4) однодоменных жидких кристаллов (холестерика или закрученного нематика).

Рассмотрим метод расчета отраженной и прошедшей световых волн, основанный на матричном подходе Берремана при прохождении световой волны через многослойную систему без учета магнитоэлектрического эффекта.

Как было показано выше, матрица Берремана (переходная матрица линейного дифференциального уравнения) позволяет учесть интерференционные эффекты многократного отражения, возникающего между слоями. В конечном итоге она определяет линейное преобразование между тангенциальными компонентами электрического и магнитного полей на входе оптической системы и соответствующими компонентами отражения и пропускания на выходе (рис. 6.1).

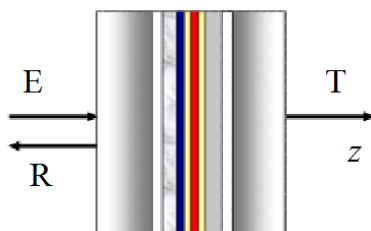


Рис. 6.1. Прохождение света через многослойную оптическую среду: E, R, T – падение, отражение и пропускание света соответственно [21]

Рассмотрим общий случай размера и положения диэлектрического эллипсоида, или оптической индикатрисы кристалла. На рис. 6.2 изображен эллипсоид диэлектрической проницаемости, его главные оси A, B и C ориентированы произвольным образом по отношению к локальной системе координат X_n, Y_n, Z_n . Главные значения $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$ различны по величине; θ – угол нутации

(отклонение, отсчитываемое от оси Z); φ – (иногда его обозначают буквой ψ) – угол прецессии (вращение вокруг оси Z при фиксированном θ); ψ – угол вращения (иногда его обозначают буквой φ) эллипсоида вокруг оси C против часовой стрелки; α – угол падения света; $Ox_n Z_n$ – плоскость падения света [21].

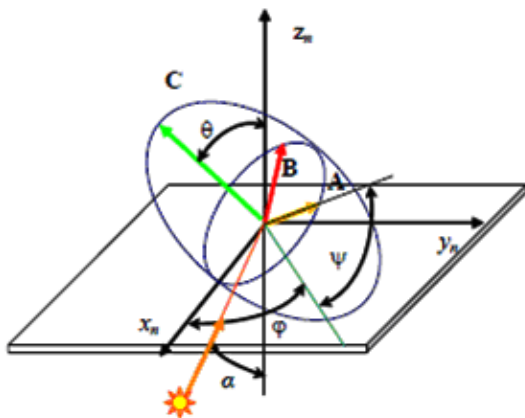


Рис. 6.2. Общее положение эллипсоида диэлектрической проницаемости [21]

Согласно подходу Берремана одномерная неоднородная среда может быть полностью описана большим числом плоскопараллельных слоев, каждый из которых считается однородным. Для каждого из слоев могут быть достаточно просто решены волновые уравнения. Решения для смежных слоев могут быть совмещены при помощи граничных условий для тангенциальных (x и y) компонент электромагнитного поля. Обычно ось z выбирается так, чтобы быть перпендикулярной плоскости слоев, и в рамках метода Берремана четыре тангенциальных компоненты электромагнитного поля рассматриваются как четыре компоненты вектора Ψ (вектора Берремана см. (6.8)), а система уравнений Максвелла заменяется одним матричным уравнением 6.7. В нашем случае

дифференциальная матрица распространения будет иметь вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & 1 - \frac{k_1^2}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_1 \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_1 k_2}{\varepsilon_{33}} \\ \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{31} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} - k_2^2 & -\frac{k_1 \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{12} - \frac{\varepsilon_{32} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} + k_2 k_1 & -\frac{k_2 \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \\ -\frac{k_2 \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_1 k_2}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_2 \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 1 - \frac{k_2^2}{\varepsilon_{33}} \\ \varepsilon_{21} - \frac{\varepsilon_{21} \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} + k_1 k_2 & -\frac{k_1 \varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} - k_1^2 & -\frac{k_2 \varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ – волновой вектор, а значения компонент тензора диэлектрической проницаемости ε_{jk} предполагаются комплексными. Таким образом, учитываются поглощение и его анизотропия.

Граничные условия требуют, чтобы этот вектор с выходной стороны n -го слоя совпадал со входным вектором слоя $n+1$. Иными словами, необходимо различать эти два вектора. Связь между входным и выходным векторами n -го слоя может быть записана как

$$\Psi_n = P_n \Psi_{n-1},$$

где P_n – функция распространения световой волны в n -м слое или матрица Берремана, ее вид зависит от толщины слоя d_n и определяется выражением:

$$P_n = \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} d_n \Delta_n \right\},$$

где Δ_n – дифференциальная матрица распространения n -го слоя.

Таким образом, в случае однородной оптической среды нахождение матрицы Берремана сводится к вычислению экспоненты от матрицы Δ . В общем случае, когда оптические параметры среды зависят от z и среду разбивают на N слоёв, в пределах которых оптические параметры рассматриваются постоянными, и отыскание решения задачи сводится к перемножению соответствующих матриц для индивидуальных слоёв:

$$\Psi_n = \left(\prod_{n=N}^1 P_n \right) \Psi_0.$$

Это соотношение справедливо и для случая сложной оптической системы, состоящей из дискретных оптических элементов (поляроиды, фазовые пластины и т. д.). Физические основы полноты этого выражения заключаются в непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. Поэтому даже в случае слоистой системы разнородных оптических сред не требуются дополнительные граничные условия. И в самом общем случае задача численного интегрирования сводится к нахождению функции (экспоненты) от матрицы Δ .

Выполнение законов поглощения и отражения обуславливает то, что тангенциальные компоненты волновых векторов $k_\alpha = \frac{\omega}{c}(k_1, k_2, k_3)$ совпадают на границах разделов слоев. В методе Берремана система координат выбирается обычно так, чтобы ось x была параллельна k_α , и, таким образом, можно считать $k_2 = 0$. Рассмотрим этот случай более подробно [21].

Тензор диэлектрической проницаемости кристаллов имеет 9 компонент, тензор является симметричным $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$ и может быть приведен к главным осям, для любого кристалла может быть выбрана система координат, в которой тензор имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Главные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ связаны с главными осями эллипсоида диэлектрической проницаемости анизотропного материала. Для моноклинных и триклинных систем можно всегда найти главные значения в декартовой системе координат. Тем не менее такое преобразование будет зависеть от ω , а основные оси кристалла в общем случае могут быть отличны от лабораторной системы координат. Углы Эйлера φ, ψ и θ используются для вращения декартовой системы координат с помощью выражения:

$$\varepsilon_{jk} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} A^{-1},$$

где матрица A является ортогональной матрицей вращения:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \sin \theta \sin \varphi \\ A_{21} & A_{22} & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi,$$

$$A_{12} = -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi,$$

$$A_{21} = \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi,$$

$$A_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi.$$

Углы Эйлера описывают переход от лабораторной системы координат к локальной системе координат кристалла. Матрица коэффициентов Δ зависит от диэлектрического тензора ε_{jk} и компоненты k_1 волнового вектора k_α :

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & 1 - \frac{k_1^2}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_1 \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 0 \\ \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{31} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_1 \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{12} - \frac{\varepsilon_{32} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon_{21} - \frac{\varepsilon_{21} \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & -\frac{k_1 \varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} - k_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Δ не зависит от z в том случае, если среда однородна. Решением уравнения (6.7) для слоя толщиной d является матрица преобразования L_p :

$$\Psi(z+d) = e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta d}\Psi(z) = L_p\Psi(z), \quad L_p = e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta d}. \quad (6.10)$$

Матрица L_p связывает компоненты электрического и магнитного полей на границах слоя толщиной d . Переходная матрица L_p полностью описывает прохождение света сквозь однородную плоскопараллельную структуру и включает эффекты всех множественных отражений, в том числе и при наличии поглощения. Матрица L_p зависит от толщины слоя d и еще от девяти неизвестных параметров (при фиксированной длине волны) – трех пар комплексных значений тензора диэлектрической проницаемости и

трех углов Эйлера. При этом матрица Δ является входным параметром для вычисления матрицы L_p . Достаточно малое значение d , требуемое для быстрой сходимости экспоненциальной функции, может быть получено за счет разложения в ряд Тэйлора с фактором, зависящим от длины волны $\frac{\omega}{c}d = \frac{2\pi}{\lambda}d$. В методе Берремана часто используют способы быстрого расчета матрицы преобразования, основанные на теореме Сильвестра-Лагранжа:

$$L_p = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d} = \beta_0 E + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \beta_3 \Delta^3. \quad (6.11)$$

Для вычисления переходной матрицы малое значение толщины не требуется. При этом заметим, что $[L_p(d)]^{-1} = L_p(-d)$. Скалярные величины β_i получаются из линейных соотношений:

$$e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}q_k d} = \sum_{j=0}^3 \beta_j q_k^j, \quad (6.12)$$

где q_k – собственные значения матрицы Δ , $k = 1 \div 4$. Два решения имеют положительные действительные части и отвечают за прохождение плоских волн сквозь плоскопараллельную пластину. Решения с отрицательными действительными частями соответствуют отраженным компонентам волны. Выражения для собственных значений можно записать в аналитическом виде:

$$q_{1/2}^+ = \frac{1}{2} \left\{ -k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} - \sqrt{\Omega + \Sigma} \pm \sqrt{\Xi - \frac{s_3}{4\sqrt{\Omega + \Sigma}}} \right\},$$

$$q_{1/2}^- = \frac{1}{2} \left\{ -k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} + \sqrt{\Omega + \Sigma} \pm \sqrt{\Xi + \frac{s_3}{4\sqrt{\Omega + \Sigma}}} \right\},$$

где

$$\Omega = -\frac{2}{3}t_1 + \left(k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \right)^2,$$

$$\Xi = -\frac{4}{3}t_1 + 2 \left(k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \right)^2 - \Sigma,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left\{ s_1 \left(\frac{1}{2} \left[s_2 + \sqrt{s_2^2 - 4s_1^3} \right] \right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2} \left[s_2 + \sqrt{s_2^2 - 4s_1^3} \right] \right)^{\frac{1}{3}} \right\},$$

$$s_1 = t_1^2 + 12 \left(k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} t_2 + t_3 \right),$$

$$s_2 = 2t_1^3 + 36k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} t_1 t_2 + 108 \left(t_2^2 + \left[k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \right]^2 t_3 \right) - 72t_1 t_3,$$

$$s_3 = -8k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \left(\left[k_1 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \right]^2 - t_1 \right) + 16t_2,$$

и

$$t_1 = \frac{1}{\varepsilon_{33}} \left\{ \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{33} \left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - k_1^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} \right) \right] \right\},$$

$$t_2 = \frac{k_1}{\varepsilon_{33}} (\varepsilon_{13}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}k_1^2),$$

$$t_3 = -\frac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{33}} +$$

$$+ \frac{2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}} + \frac{k_1^2 [\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{11}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - k_1^2) + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}]}{\varepsilon_{33}}.$$

Здесь $q_{1/2}^+$ ($q_{1/2}^-$) описывают прошедшую/отраженную волны соответственно. Система (6.10) может быть теперь решена с использованием коэффициентов β_i , полученных по формулам (6.12).

Элементы матрицы Δ являются комплексными числами и выражаются по известным формулам через компоненты диэлектрического тензора с учетом параметров падающей волны. При этом, если элементы матрицы Δ не зависят от z , то решение данной линейной системы может быть выражено через экспоненту от этой матрицы в виде:

$$\chi(z) = \exp\left(-\frac{i\omega z}{c}\Delta\right)\chi(0) = P(z)\chi(0), \quad (6.13)$$

где $\chi(z) = (E_x, H_y, E_y, -H_x)^T$, $P(z)$ – матрица 4x4 Берремана для однородной оптической среды.

Амплитуды отраженной и прошедшей волн могут быть получены как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\chi_T = P(z)(\chi_I + \chi_R), \quad (6.14)$$

где $\chi_I = (E_x, r_x E_x, E_y, r_y E_y)^T$ – вектор падающей волны,
 $\chi_R = (R_x, -r_x R_x, R_y, -r_y R_y)^T$ – вектор отраженной волны,
 $\chi_T = (T_x, r_x^* T_x, T_y, r_y^* T_y)^T$ – вектор прошедшей волны,

$$r_x = \frac{n_1}{\cos \alpha_1}, \quad r_y = n_1 \cos \alpha_1, \quad r_x^* = \frac{n_2}{\cos \alpha_2}, \quad r_y^* = n_2 \cos \alpha_2.$$

Здесь n_1 и n_2 – действительные коэффициенты преломления изотропных входной и выходной сред; α_1 и α_2 – углы светового луча во входной и выходной средах. Между параметрами n_i и α_i выполняется соотношение (закон Снеллиуса) $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.

Заметим, что приведенное выше представление векторов χ_I , χ_T , χ_R справедливо только для *изотропных* сред, где имеет место однозначная связь между компонентами напряженностей электрического и магнитного полей. Поэтому далее считаем, что входная и выходная среды изотропны.

Решение системы (6.14) сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений 2×2 , которая, к сожалению, может быть вырождена. Для решения данной системы применяется регуляризованный устойчивый метод, работающий при любых входных данных.

Найденные комплексные значения амплитуд T_x , T_y , R_x , R_y служат основой для вычисления основных параметров для отраженного и прошедшего лучей: коэффициентов отражения и пропускания, векторов Стокса, степени деполяризации и многих других параметров. В частности, коэффициенты отражения и пропускания окончательно вычисляются по формулам [21]:

$$T = \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} \frac{|T_x / \cos \alpha_2|^2 + |T_y|^2}{|E_x / \cos \alpha_1|^2 + |E_y|^2},$$

$$R = \frac{|R_x / \cos \alpha_1|^2 + |R_y|^2}{|E_x / \cos \alpha_1|^2 + |E_y|^2}.$$

§ 3. Расчет оптически толстых слоев

Изложенная методика имеет определенные сложности при работе с толстыми слоями. При прохождении волны через толстый слой в последнем возникают многократные отражения света, что приводит к набегу фаз большему, чем длина когерентности света Δl . Такие колебания в реальной оптической системе не наблюдаются, что связано со смазыванием интерференционной картины. Можно считать также, что точность измерительного прибора (например, спектрофотометра) ниже периода этих колебаний и поэтому при измерениях эти колебания усредняются [21].

Значительная толщина подложки (по сравнению с длиной волны) вызывает существенные колебания выходного рассчитанного спектра (отражения и пропускания). Для приведения в соответствие измеряемых данных и расчетов необходимо внести усреднение в расчет результирующих спектров.

Подобное усреднение выполняется на случайной сетке по диапазону $\Delta\lambda$, определяемому обычно используемой для спектрофотометров длиной когерентности света [21]:

$$\Delta l = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

§ 4. Способы вычисления матрицы распространения для неоднородной среды

Как было показано выше, в общем случае слоистой анизотропной структуры M – некоторая произвольная функция от z , и волновое уравнение (6.7) не имеет, вообще говоря, аналитического решения. В частном случае, когда M – постоянная, не зависящая от z (в некотором непрерывном интервале h), уравнение (6.7) можно непосредственно интегрировать; это дает

$$\Psi(z+h) = L(h)\Psi(z), \quad (6.15)$$

где

$$L(h) = e^{-i\frac{\omega h}{c}\Delta} = I - i\frac{\omega h}{c}\Delta - \frac{1}{2!}\left(\frac{\omega h}{c}\right)^2 \Delta\Delta + \dots \quad (6.16)$$

Здесь I представляет единичную 4×4 матрицу.

Выражение (6.15) представляет собой линейное матричное соотношение между обобщенными векторами поля Ψ на двух различных параллельных плоскостях, находящихся на расстоянии h в однородной анизотропной среде. Матрица слоя $L(h)$ определяется дифференциальной матрицей распространения Δ в соответствии с соотношением (6.16).

Другое выражение для матрицы слоя $L(h)$ можно получить исходя из того, что, когда матрица представляет собой постоянную, не зависящую от z , уравнение (6.3) имеет четыре частных решения в виде плоских волн:

$$\Psi(z) = \Psi_l(0)e^{-iq_l z}, \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (6.17)$$

Четыре собственных значения q_l могут быть получены аналитически путем решения полиномиального уравнения четвертой степени для q в результате приравнивания к нулю определителя в характеристическом уравнении, которое получается путем подстановки уравнения (6.17) в уравнение (6.3), т.е. матричного уравнения для собственных значений

$$\begin{aligned} [\omega\Delta - qI] \Psi(0) &= 0, \\ \det [\omega\Delta - qI] &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя каждое собственное значение q_l в уравнение, можно определить собственные векторы

$$\frac{\omega}{c} \Delta \Psi_l(0) = q_l \Psi_l(0),$$

так как получаем четыре однородных линейных уравнения, которые можно решить относительно элементов соответствующего собственного вектора.

Используя Δ , столбцами которой являются четыре собственных вектора уравнения $\Psi_l(0)$, легко показать, что матрица слоя, $L(h)$ связывающая поля на двух границах анизотропной пластинки толщиной h (см. выражение (6.15)) определяется соотношением

$$L(h) = \Psi K(h) \Psi^{-1},$$

где K – диагональная матрица, элементы которой определяются собственными значениями q_l :

$$K_{jj} = e^{-iq_j h}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

В неоднородной анизотропной среде, где M – непрерывная функция z , выражение (6.17) можно применять, если разделить среду на слои, достаточно тонкие для того, чтобы величину M можно было считать не зависящей от z внутри каждого слоя. Путем повторного применения выражения (6.17) к последовательным слоям можно найти, что поля на двух плоскостях, отстоящих друг от друга на расстояние d , связаны следующим соотношением:

$$\Psi(z + d) = \bar{L}(z, d)\Psi(z), \quad (6.18)$$

где $\bar{L}(z, d) = L(z + d - h_m, h_m) \dots L(z + h_1 + h_2, h_2)L(z + h_1, h_1)$;

$$d = h_1 + h_2 + \dots + h_m. \quad (6.19)$$

Для общности предполагается, что слои h_1, h_2, \dots, h_m имеют различную толщину. Заметим, что $L(z, h)$ характеризует тонкий однородный слой, расположенный между z и $z + h$.

Другой способ вычисления матрицы распространения неоднородного слоя заключается в следующем. Подставим выражение (6.18) в уравнение (6.7), тогда мы получим следующее уравнение для матрицы распространения $L(z, d)$:

$$\frac{\partial L(z, d)}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} \Delta(z) L(z, d). \quad (6.20)$$

Матричное уравнение (6.19) представляет собой систему 16 линейных дифференциальных уравнений относительно 16 неизвестных элементов матрицы $L(z, d)$. Очевидно, что матрица распространения получится после интегрирования этой системы с начальным условием $L(0, d) = I$.

Таким образом, уравнения (6.19) или (6.20) дают способы нахождения матрицы распространения для неоднородной среды с произвольной анизотропией.

§ 5. Изотропные пленки

Для изотропных материалов пропускание и отражение могут быть описаны более простыми уравнениями по сравнению с приближением 4x4. Несмотря на это, решение в рамках общего алгоритма бывает полезно и часто продиктовано необходимостью единого подхода к решению задачи о пропускании и/или отражении света при наличии в многослойной структуре изотропных и анизотропных слоев. Собственные значения матрицы Δ для изотропных материалов могут быть получены по формуле [21]:

$$q_1 = q_2 = -q_3 = -q_4 = q = \sqrt{\varepsilon - k_1^2},$$

где ε – функция диэлектрической проницаемости изотропного материала. В этом случае матрица системы (6.10) становится вырожденной, и амплитуды прошедшей и отраженной волн не могут быть однозначно определены. Тем не менее разложение в ряд Фурье (6.10) и разделение соответствующих сумм для синуса и косинуса приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} T_p &= E \left\{ 1 + \frac{(ik_0qd)^2}{2!} + \frac{(ik_0dq)^4}{4!} + \dots \right\} + \\ &+ i \frac{\Delta}{q} \left\{ \frac{(ik_0qd)}{1!} + \frac{(ik_0dq)^3}{3!} + \dots \right\}, \\ T_p &= E \cos(k_0dq) + i \frac{\Delta}{q} \sin(k_0dq), \\ T_p &= \begin{pmatrix} \cos(k_0dq) & 0 & 0 & i \frac{\Delta}{q} \sin(k_0dq) \\ 0 & \cos(k_0dq) & -\frac{i}{q} \sin(k_0dq) & 0 \\ 0 & -iq \sin(k_0dq) & \cos(k_0dq) & 0 \\ i \frac{\Delta}{q} \sin(k_0dq) & 0 & 0 & \cos(k_0dq) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где учтены равенства $\Delta^2 = q^2 E$, $\Delta^3 = q^2 \Delta$, $k_0 = \omega/c$.

Выражение (6.21) рекомендуется использовать в случае, когда величина $k_0 d \|q_1^\pm - q_2^\pm\|$ мала¹ и обратить матрицу (6.11) численно

¹Норма – функционал, заданный на векторном пространстве и обобщающий понятие длины вектора или модуля числа.

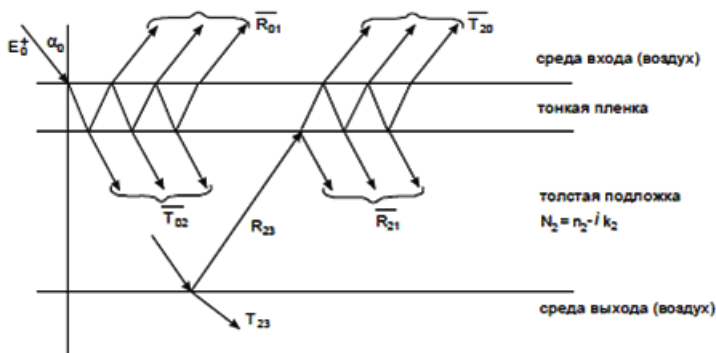


Рис. 6.3. Распространение электромагнитной волны в двухслойной системе [21]

невозможно. Заметим, что значение определителя правой части (6.11) (или близость/кратность ее собственных значений) может служить тестом на проверку анизотропности или изотропности материала [21].

§ 6. Комбинированный метод

При решении обратной задачи о вычислении параметров анизотропного слоя, расположенного на толстой изотропной подложке, по измеренным пропусканию и отражению для ускорения расчетов бывает удобнее использовать комбинированную методику: прохождение светом анизотропного слоя рассчитывать матричным методом, а для толстой подложки использовать методику классических расчетов. Данный подход применим только для расчета интенсивностей прошедшего и отраженного света. Однако именно эти величины и измеряются спектрофотометром и являются входными данными для обратной задачи в нашей постановке.

На рис. 6.3 представлена схема расчета комбинированного метода. Здесь $\overline{T_{02}}$ – общая энергия первичной волны, прошедшей из 0 во 2 среду, $\overline{R_{01}}$ – общая энергия первичной волны, отраженной

от 0 границы, $\overline{T_{20}}$ – энергия волны, отраженной от нижней границы и прошедшей из 2 в 0 среду, $\overline{R_{21}}$ – общая энергия волны, отраженной на границе 2 – 1, с учетом многократного отражения в тонкой пленке.

Применение комбинированной методики в дальнейшем позволяет значительно сократить время решения обратной задачи. На основе приведенных методик проводится расчет пропускания и отражения в прямой и обратной задачах.

В расширенной постановке прямая задача используется для моделирования оптических систем, состоящих из совокупности всевозможных оптических элементов. Процесс моделирования таких систем очень важен для приложений, связанных с проектированием различных оптических конструкций и, в частности, жидкокристаллических дисплеев. Ниже приведен пример постановки прямой задачи.

Для оптических систем, состоящих из тонких пленок произвольной природы, подложек, различных оптических элементов (поляризаторы, ретардеры, воздушные прослойки и т.п.), для произвольных поляризаций падающего света требуется вычислить все основные параметры прошедшего и отраженного света в заданном диапазоне длин волн $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$ и/или в диапазоне углов падения $[\alpha_{beg}, \alpha_{end}]$.

В дальнейшем под многослойной системой будем понимать произвольный набор оптических элементов, через который проходит (или от которых отражается) луч света. Можно считать, что на пути светового луча стоит неоднородная оптическая среда. Следовательно, для многослойной системы образуется зависимость параметров среды (матрицы Δ из формулы (6.7)) от оси z , а итоговая матрица Берремана находится как произведение матриц отдельных слоев:

$$P(z) = \prod_{i=n}^1 P(z_i). \quad (6.22)$$

Заметим, что данное соотношение справедливо для оптических систем любой сложности, в частности, для систем с дискрет-

ными элементами типа поляроидов, фазовых пластинок и т.п. В силу непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей никаких дополнительных граничных условий в случае многослойной системы не требуется.

Из соотношения (6.14) вытекает, что вычислительные затраты, необходимые для расчета матрицы $P(z)$, зависят от вычислительных затрат на расчет экспоненты от матрицы Δ_i для каждого однородного слоя.

Состояние векторного поля на выходе такой системы с матрицей $P(z)$, рассчитанной в соответствии с формулой (6.22), снова определяется по формуле (6.13).

Напомним, что дополнительных вычислительных затрат требуют расчеты прохождения света сквозь многослойную структуру при наличии толстых слоев. Как отмечалось выше, в этом случае при вычислении по формуле (6.13) с матрицей (6.22) следует выполнять усреднение результатов по диапазону, определяемому длиной когерентности Δl .

§ 7. Отражение и пропускание конечным анизотропным слоем, расположенным между полубесконечной изотропной средой и веществом подложки

На рис. 6.4 показан слой (пластинка) оптически неоднородной анизотропной среды, помещенный между изотропными окружающей средой и подложкой, показатели преломления которых обозначены N_0 и N_2 .

Пусть плоскости $z = 0$ и $z = d$ совпадают с границами раздела между слоем, окружающей средой и подложкой. Плоская волна, падающая из окружающей среды на слой (угол падения φ_0), порождает отраженную волну в той же среде (угол отражения φ_0) и преломленную волну в подложке (угол преломления φ_2). Соотношение между φ_0 и φ_2 определяется законом Снеллиуса

$$N_2 \sin \varphi_2 = N_0 \sin \varphi_0.$$

Матрица распространения L связывает обобщенные векторы

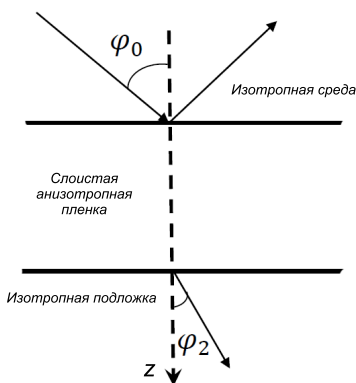


Рис. 6.4. Отражение и пропускание плоской волны слоистой анизотропной системой, помещенной между полубесконечными изотропными средой и подложкой: φ_0 – угол падения в среде, φ_2 – угол преломления в подложке. Взаимно перпендикулярные оси x и y лежат в плоскости границы раздела «среда - отражающая система» параллельно и перпендикулярно плоскости падения (не показаны); ось z перпендикулярна слоям

поля, определенные выражением $\Psi(d)$ и $\Psi(0)$, на двух граничных поверхностях слоя:

$$\Psi(d) = \bar{L}\Psi(0). \tag{6.23}$$

Оптическая 6×6 матрица M , которая строится из тензоров ε_{jk} , μ_{jk} , δ_{jk} и γ_{jk} , позволяет с помощью выражений (6.9) рассчитать дифференциальную 4×4 матрицу распространения Δ . Наконец, используя матрицу Δ , вычисляем 4×4 матрицу неоднородного анизотропного слоя L с помощью выражений (6.16), (6.17) и (6.19) [или (6.20)].

Полное поле в среде при $z = 0$ складывается из полей падающей и отраженной волн, так что условие сшивки обобщенного вектора поля Ψ на границе раздела $z = 0$ можно представить в следующем виде:

$$\Psi(0^+) = \Psi_i(0^-) + \Psi_r(0^-), \tag{6.24}$$

где верхние индексы «-» или «+» означают, что мы приближаемся к границе раздела $z = 0$ со стороны среды или со стороны слоя, а нижние индексы i и r относятся к падающей на среду и отраженной от нее волнам. Полное поле в подложке создается только прошедшей плоской волной, а сшивка обобщенного вектора поля на границе раздела $z = d$ приводит к соотношению

$$\Psi(d - 0) = \Psi(d + 0), \quad (6.25)$$

где $d - 0$ или $d + 0$ указывают, что мы приближаемся к границе раздела $z = d$ со стороны слоя и со стороны подложки, соответственно.

Пусть (E_{ip}, E_{is}) , (E_{rp}, E_{rs}) и (E_{tp}, E_{ts}) представляют собой соответственно компоненты векторов электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн, параллельные (p) и перпендикулярные (s) плоскости падения. В немагнитной ($\mu = 1$) оптически изотропной среде компоненты магнитного поля связаны простыми соотношениями с соответствующими ортогональными компонентами электрического поля через показатель преломления N :

$$\frac{H_p}{E_s} = \frac{H_s}{E_p} = N. \quad (6.26)$$

Таким образом, используя выражение (6.26), можно рассчитать три обобщенных вектора поля Ψ_i , Ψ_r , и Ψ_t падающей, отраженной и прошедшей волн, исходя только из p - и s -компонент электрического поля, т. е. не используя в явном виде компоненты магнитного поля:

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} E_{ip} \cos \varphi_0 \\ N_0 E_{ip} \\ E_{is} \\ N_0 E_{is} \cos \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_r = \begin{pmatrix} -E_{rp} \cos \varphi_0 \\ N_0 E_{rp} \\ E_{rs} \\ -N_0 E_{rs} \cos \varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} E_{tp} \cos \varphi_2 \\ N_2 E_{tp} \\ E_{ts} \\ N_2 E_{ts} \cos \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Заметим, что выражения (6.27) написаны для того случая, когда направления p и s соответствуют показанным на рис. 6.4, и, что направление вектора $E \times H$ совпадает с направлением распространения волны. Подставляя выражения (6.27) в граничные условия (6.24) и (6.25), получаем выражения для векторов поля $\Psi(0)$ и $\Psi(d)$ на границах анизотропного слоя $z = 0$ и $z = d$ через векторы полей Ψ_i , Ψ_r , и Ψ_t . Затем с помощью матрицы слоя L связываем поля на границах слоя $z = 0$ и $z = d$ согласно соотношению (6.20). Результирующее уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{tp} \cos \varphi_2 \\ N_2 E_{tp} \\ E_{ts} \\ N_2 E_{ts} \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} (E_{ip} - E_{rp}) \cos \varphi_0 \\ N_0 (E_{ip} + E_{rp}) \\ E_{is} + E_{rs} \\ N_0 (E_{is} - E_{rs}) \cos \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (6.28) можно затем разложить на четыре линейных алгебраических уравнения для шести компонент поля (E_{ip}, E_{is}) , (E_{rp}, E_{rs}) и (E_{tp}, E_{ts}) . Компоненту E_{tp} легко исключить из первого и второго уравнений, а E_{ts} – из третьего и четвертого уравнений. Это приводит к двум линейным алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned} a_{ip} E_{ip} + a_{is} E_{is} + a_{rp} E_{rp} + a_{rs} E_{rs} &= 0, \\ b_{ip} E_{ip} + b_{is} E_{is} + b_{rp} E_{rp} + b_{rs} E_{rs} &= 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ip} &= \cos \varphi_0 (l_{11} N_2 - l_{21} \cos \varphi_2) + N_0 (l_{12} N_2 - l_{22} \cos \varphi_2), \\ a_{rp} &= -\cos \varphi_0 (l_{11} N_2 - l_{21} \cos \varphi_2) + N_0 (l_{12} N_2 - l_{22} \cos \varphi_2), \\ a_{is} &= N_0 \cos \varphi_0 (l_{14} N_2 - l_{24} \cos \varphi_2) + (l_{13} N_2 - l_{23} \cos \varphi_2), \\ a_{rs} &= -N_0 \cos \varphi_0 (l_{14} N_2 - l_{24} \cos \varphi_2) + (l_{13} N_2 - l_{23} \cos \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ip} &= \cos \varphi_0 (l_{31} N_2 \cos \varphi_2 - l_{41}) + N_0 (l_{32} N_2 \cos \varphi_2 - l_{42}), \\
b_{rp} &= -\cos \varphi_0 (l_{31} N_2 \cos \varphi_2 - l_{41}) + N_0 (l_{32} N_2 \cos \varphi_2 - l_{42}), \\
b_{is} &= N_0 \cos \varphi_0 (l_{34} N_2 \cos \varphi_2 - l_{44}) + (l_{33} N_2 \cos \varphi_2 - l_{43}), \\
b_{rs} &= -N_0 \cos \varphi_0 (l_{34} N_2 \cos \varphi_2 - l_{44}) + (l_{33} N_2 \cos \varphi_2 - l_{43}).
\end{aligned}$$

Уравнения (6.29) можно записать в следующей матричной форме:

$$\begin{pmatrix} E_{rp} \\ E_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{pp} & R_{ps} \\ R_{sp} & R_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ip} \\ E_{is} \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

или

$$E_r = R E_i.$$

Матрица R представляет собой амплитудную комплексную 2×2 матрицу отражения

$$R = \frac{1}{a_{rs} b_{rp} - a_{rp} b_{rs}} \begin{pmatrix} (a_{ip} b_{rs} - a_{rs} b_{rp}) & (a_{is} b_{rs} - a_{rs} b_{is}) \\ (a_{rp} b_{ip} - a_{ip} b_{rp}) & (a_{rp} b_{is} - a_{is} b_{rp}) \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Путем подстановки величин $E_{rp} = R_{pp} E_{ip} + R_{ps} E_{is}$ и $E_{rs} = R_{sp} E_{ip} + R_{ss} E_{is}$ во второе и третье уравнения получающиеся при разложении (6.28), компоненты отраженного поля исключаются. В результате мы получаем два линейных уравнения, которые связывают компоненты прошедшего поля (E_{tp}, E_{ts}) только с компонентами падающего поля (E_{ip}, E_{is}). Полученные таким образом уравнения можно записать в виде

$$E_t = T E_i, \quad (6.32)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} T_{pp} & T_{ps} \\ T_{sp} & T_{ss} \end{pmatrix}.$$

Матрица T представляет собой амплитудную комплексную 2×2 матрицу пропускания с элементами

$$\begin{aligned}
T_{pp} &= [(l_{21} c_0 + l_{22} N_0) + R_{pp}(l_{22} N_0 - l_{21} c_0) + R_{sp}(l_{23} - l_{24} N_0 c_0)] / N_2, \\
T_{ps} &= [(l_{23} + l_{24} N_0 c_0) + R_{ps}(l_{22} N_0 - l_{21} c_0) + R_{ss}(l_{23} - l_{24} N_0 c_0)] / N_2, \\
T_{sp} &= (l_{31} c_0 + l_{32} N_0) + R_{pp}(l_{32} N_0 - l_{31} c_0) + R_{sp}(l_{33} - l_{34} N_0 c_0), \\
T_{ss} &= (l_{33} + l_{34} N_0 c_0) + R_{ps}(l_{32} N_0 - l_{31} c_0) + R_{ss}(l_{33} - l_{34} N_0 c_0). \quad (6.33)
\end{aligned}$$

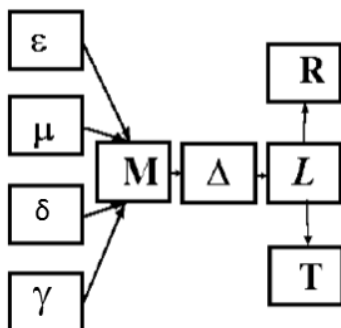


Рис. 6.5. Схематичное изображение последовательности операций, необходимых для расчета матриц отражения R и пропускания T по тензорам ε , μ , δ и γ

В элементах матрицы T в (6.33) введено обозначение $c_0 = \cos \varphi_0$.

Определение матриц отражения R и пропускания T завершает решение проблемы. Действительно, R и T представляют собой величины, которые могут быть измерены при помощи эллипсометра. Последовательность операций, необходимых для расчета R и T при заданных значениях тензоров ε , μ , δ и γ (и заданной геометрии), представлена схематически на рис. 6.5.

Ярким примером использования матричного формализма расчета оптических характеристик сложных анизотропных систем является использование комплексных матриц 4×4 для вычисления пропускания и отражения света ориентированным слоем жидкого кристалла. Жидкие кристаллы обладают уникальными оптическими свойствами, особенно холестерическая фазы ЖК, которая была обнаружена Леманом в ранних работах (до 1900 г.). Когда белый свет падает на образец с планарной структурой (его оптическая ось перпендикулярна поверхностям стекол), происходит селективное отражение света, причем максимум длины волны отражения изменяется в зависимости от угла падения по закону Брэгга. При нормальном падении отраженный свет в значитель-

ной степени поляризован по кругу. Одна поляризованная по кругу компонента почти полностью отражается в некотором спектральном интервале, тогда как другая проходит практически без изменений. Более того, в отличие от обычных случаев, отраженная волна имеет тот же знак круговой поляризации, что и падающая. В направлении вдоль оптической оси среда обладает очень большим оптическим вращением, обычно порядка нескольких тысяч градусов на миллиметр. Вблизи области отражения дисперсия оптического вращения аномальна, и знаки вращения по разные стороны от полосы отражения противоположны. Такое поведение сходно с поведением оптически активной молекулы в окрестности полосы поглощения.

Для описания оптических свойств ЖК рассмотрим сначала его модельное представление. Холестерические жидкие кристаллы (ХЖК) образованы оптически активными молекулами и отличаются тем, что направление длинных осей молекул в каждом последующем слое, состоящем из параллельно ориентированных и свободно перемещающихся в двух направлениях молекул, составляет с направлением осей молекул предыдущего слоя некоторый угол. При этом образуется спираль, шаг которой p зависит от природы молекул и внешних воздействий. Шагу p соответствует поворот оси ориентации молекул (директора) на угол 2π , хотя период изменения оптических свойств равен $p/2$, вследствие не полярности молекул образующих структуру ХЖК). В качестве примера ХЖК, бесцветного в кристаллическом и жидком изотропном состоянии и меняющего окраску (селективное отражение) по мере изменения температуры в ЖК-состоянии, можно привести холестерилэрукат. К ХЖК относятся также так называемые «хиральные» (chiral) нематики, обладающие оптической активностью.

Рассмотрим применение матричного формализма Берремана для описания явления селективного отражения.

При таком рассмотрении ХЖК, для света падающего на него нормально (вдоль оси ХЖК), характеризуется следующей диф-

ференциальной матрицей распространения Δ [20]:

$$\Delta(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{X^2}{\varepsilon_{33}} & 0 & 0 \\ \varepsilon + \delta \cos 2\beta z & 0 & \delta \sin 2\beta z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta \sin 2\beta z & 0 & \varepsilon - \delta \cos 2\beta z - X^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

где $X = \zeta c/\omega$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon = (\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp})/2$, $\delta = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})/2$, $\varepsilon + \delta = \varepsilon_{\parallel} = n_e^2$, $\varepsilon - \delta = \varepsilon_{\perp} = n_o^2$, n_o , n_e – показатели преломления ЖК перпендикулярно и вдоль оптической оси ХЖК соответственно, $\beta = 2\pi/p$, p – шаг спирали ХЖК. Длина волны λ_{max} максимума полосы селективного отражения ХЖК удовлетворяет следующему равенству:

$$\lambda_{max} = \frac{p}{2}(n_e + n_o). \quad (6.35)$$

Используя подход Берремана, можно просто получить аналитические решения для случая $X = 0$. При $X = 0$ из соображений симметрии достаточно очевидно, что собственные векторы $\psi(z)$ должны иметь такой вид, что E_x и H_y при $z = 0$ совпадают с E_y и $-H_x$ при $z = \lambda/4$, за исключением фазового коэффициента. Эта спиральная симметрия характеризуется собственными векторами вида

$$\begin{aligned} \psi(z) &= e^{iqz} \begin{pmatrix} Ae^{i\beta z} + Be^{-i\beta z} \\ A'e^{i\beta z} + B'e^{-i\beta z} \\ Ae^{i(\beta z - \frac{\pi}{2})} + Be^{-i(\beta z - \frac{\pi}{2})} \\ A'e^{i(\beta z - \frac{\pi}{2})} + B'e^{-i(\beta z - \frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} = \\ &= e^{i(q+\beta)z} \begin{pmatrix} A \\ A' \\ -iA \\ -iA' \end{pmatrix} + e^{i(q-\beta)z} \begin{pmatrix} B \\ B' \\ iB \\ iB' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где должны быть определены значения A , A' , B и B' и собственные значения коэффициента фазы распространения q . Домножим

вектор ψ на матрицу Δ (6.34) для случая $X = 0$ и получим

$$\Delta\psi = e^{i(q+\beta)z} \begin{pmatrix} A' \\ \varepsilon A + \delta B \\ -iA' \\ -i(\varepsilon A + \delta B) \end{pmatrix} + e^{i(q-\beta)z} \begin{pmatrix} B' \\ \varepsilon B + \delta A \\ iB' \\ i(\varepsilon B + \delta A) \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование же дает

$$-i\frac{c}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = e^{i(q+\beta)z} \begin{pmatrix} A \\ A' \\ -iA \\ -iA' \end{pmatrix} \frac{c}{\omega}(q+\beta) + e^{i(q-\beta)z} \begin{pmatrix} B \\ B' \\ iB \\ iB' \end{pmatrix} \frac{c}{\omega}(q-\beta).$$

Следуя уравнению (6.7), приравняем левые части двух предыдущих выражений.

Приравнявая коэффициенты подобных членов, получаем следующие четыре уравнения²:

$$A' = (q + \beta)Ac/\omega, \quad (6.36)$$

$$B' = (q - \beta)Bc/\omega, \quad (6.37)$$

$$\varepsilon A + \delta B = (q + \beta)A'c/\omega = [(q + \beta)c/\omega]^2 A, \quad (6.38)$$

$$\varepsilon B + \delta A = (q - \beta)B'c/\omega = [(q - \beta)c/\omega]^2 B. \quad (6.39)$$

Последние два уравнения имеют нетривиальные решения только тогда, когда q имеет одно из четырех собственных значений

$$q = \pm \sqrt{\beta^2 \pm 2\beta \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon + \frac{(\delta^2/\varepsilon)(\omega/c)^2}{4\beta^2}} + \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}. \quad (6.40)$$

Далее присваивается произвольное значение либо A , либо B , оставшееся значение может быть вычислено с помощью уравнения (6.38)

²На самом деле уравнения повторяются дважды, потому что изначально на основе симметрии была заложена некоторая информация о виде предполагаемого собственного вектора.

или (6.39). Тогда A' и B' могут быть оценены с помощью уравнений (6.36) и (6.37).

При малых значениях ω собственные векторы, соответствующие собственным значениям q для случая $X = 0$, представляют собой свет близкий к свету в состоянии с круговой поляризацией, и материал действует в некотором роде как оптически активное вещество. Однако, когда

$$\omega \approx c\beta/\sqrt{\varepsilon},$$

т. е., когда длина волны в среде близка к половине длины шага спирали, собственные векторы не описывают состояние с круговой поляризацией. Более того, одна пара собственных значений становится мнимой в полосе, близкой к этой частоте. Следовательно, два из четырех собственных векторов описывают ослабленные моды. Если ε принимает действительные значения, что практически верно для многих ХЖК, то часть света, которая возбуждает ослабленную моду, полностью отражается, если образец толстый и не имеет дефектов упорядочения. Свет в другом режиме проходит через кристалл. Эта полоса отражения аналогична полосе брэгговского отражения рентгеновских лучей в кристаллах, но она возникает на оптических частотах и вызывает яркую окраску многих ХЖК. Здесь был рассмотрен случай нормального падения света и показано, что существует только одна полоса отражения. Более сложная задача – наклонное падение света ($X \neq 0$) – так же была решена Берреманом, который показал, что отраженная волна распадается на несколько волн разной интенсивности: полосы, соответствующие большим порядкам отражения, имеют в несколько раз меньшую интенсивность [20].

Заключение

В предлагаемом учебном пособии представлено описание матричных методов, которые находят свое применение в различных разделах оптики: в параксиальном приближении, при описании оптических резонаторов, явлений в поляризационной оптике, в лазерной оптике, при расчете сложных оптических систем.

Несомненным достоинством всех упомянутых в пособии методов является их удобство использования, которое состоит в том, что матрица, описывающая каскад оптических элементов (или систем), есть произведение матриц отдельных элементов (или систем), имеющих простой вид. Таким образом, матричная оптика обеспечивает несложный формализм для моделирования многих оптических систем и явлений и заслуженно оценена в научном сообществе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Стёпин. В.С., Гутнер Г.Б., Голдберг Ф.И.* Моделирование: Гуманитарная энциклопедия: Концепты [Электронный ресурс] // Центр гуманитарных технологий, 2002–2022 (последняя редакция: 09.03.2022). URL: <https://gtmarket.ru/concepts/7025> (дата обращения: 28.06.2022).
2. *Янкин С.* Вычислительные методы в оптике или как моделировать электромагнитные процессы на различных пространственных масштабах [Электронный ресурс]. URL: <https://habr.com/ru/company/comsol/blog/407695/> (дата обращения: 28.06.2022).
3. *Sjodin B.* Efficient Computational Methods for Optical Components // Opt. Photonik. 2017. Vol. 12. No. 4. Pp. 44-47. doi: 10.1002/opph.201700025
4. *Джесерард А., Берч Дж.М.* Введение в матричную оптику / пер. с англ. А. И. Божкова и Д. В. Власова; под ред. В. В. Коробкина. М.: Мир, 1978. 342 с.
5. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.3. Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: Наука, 1970. 537 с.
6. *Заказнов Н.П., Кирюшин С. И., Кузичев В.И.* Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1992. 448 с.
7. *Яриб А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с.
8. *Москалев В.А., Нагибина И.М., Полушкина Н.А., Рудин В.Л.* Прикладная физическая оптика: учеб. пособие. СПб.: Политехника, 1995. 528 с.

9. *Jones R. C.* A new calculus for the treatment of optical systems // *J. Opt. Soc. Amer.* 1941. Vol. 31. P. 488–493.
10. *Solc I.* Birefringent chain filters // *J. Opt. Soc. Amer.* 1965. Vol. 55. P. 621-625.
11. *Жен П. де.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
12. *Чандрасекар С.* Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980. 344 с.
13. *Блинов Л.М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
14. *Blinov L.M., Chigrinov V.G.* Electrooptic Effect in Liquid Crystal Materials. Springer-Verlag, New York, 1994. 464 pp.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. I. М.: Физматлит, 2002. 616 с.
16. *Захлевных А.Н.* Физика фазовых переходов в жидких кристаллах / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2007. 127 с.
17. *Симоненко Г.В.* Моделирование характеристик жидкокристаллических дисплеев и модуляторов. Саратов: изд-во гос. ун-та, 2017. 117 с.
18. *Аззам Р., Башара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 583 с.
19. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
20. *Berreman D. W.* Optics in stratified and anisotropic media: 4x4-matrix formulation // *J. Opt. Soc. Amer.* 1972. Vol. 62. P. 502–510.
21. *Ловецкий П.А. и др.* Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур / Росс. ун-т дружбы народов. Москва, 2008. 138 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Моделирование оптических явлений	5
§ 1. Понятие модели в физике. Моделирование	5
§ 2. Методы моделирования в оптике	7
Глава 2. Матричные методы в параксиальной оптике	9
§ 1. Матрицы преобразования лучей	10
§ 2. Матрица перемещения, матрица преломления и матрица отражения	13
<i>Матрица перемещения</i>	13
<i>Матрица преломления</i>	16
<i>Матрица отражения</i>	20
§ 3. Матрица преобразования лучей для оптической системы	23
§ 4. Матричное описание свойств оптической системы	27
§ 5. Задачи, иллюстрирующие матричный подход	30
§ 6. Экспериментальное определение элементов матриц оптической системы	36
§ 7. Нахождение кардинальных точек системы	38
Глава 3. Использование матриц для описания состояний поляризации световых волн	48
§ 1. Поляризация	48
§ 2. Поляризация монохроматических световых волн	49

- § 3. Линейная и круговая поляризации 54
- § 4. Представление комплексного параметра 55
- § 5. Вектор Джонса 57
- § 6. Смысл вектора Джонса 60

Глава 4. Оптическая матрица Джонса.

Формализм матриц Джонса для расчета двулучепреломляющих систем 62

- § 1. Формализм матриц Джонса 62
- § 2. Матрица Джонса для двулучепреломляющего
кристалла 67
- § 3. Матрицы Джонса основных оптических элементов 71
- § 4. Интенсивность излучения, прошедшего через
оптическую систему 82
- § 5. Поляризационные интерференционные фильтры . 84
- § 6. Фильтр Лио–Эмана 96
- § 7. Распространение света в анизотропной среде
с кручением 99
- § 8. Адиабатическое отслеживание 101
- § 9. Расчет коэффициента пропускания света
неоднородного слоя нематического жидкого
кристалла в электрическом поле 104
- § 10. Экспериментальное определение элементов
вектора и матрицы Джонса 113

Глава 5. Метод матриц Мюллера и векторов

Стокса для расчета оптических систем 124

- § 1. Поляризация квазимонохроматических волн . . . 124
- § 2. Вектор Стокса 130
- § 3. Матрица когерентности 133
- § 4. Матрица Мюллера 138
- § 5. Матрицы Мюллера основных оптических элементов 144
- § 6. Экспериментальное определение элементов матриц
Мюллера и векторов Стокса 154

§ 7. Связь матричных формализмов Джонса и Мюллера	158
§ 8. Примеры использования матриц Джонса и Мюллера	168

Глава 6. Методы расчета слоистых структур при известных оптических параметрах материалов 185

§ 1. Обзор методов	185
§ 2. Матричный метод Берремана	188
§ 3. Расчет оптически толстых слоев	202
§ 4. Способы вычисления матрицы распространения для неоднородной среды	202
§ 5. Изотропные пленки	205
§ 6. Комбинированный метод	206
§ 7. Отражение и пропускание конечным анизотропным слоем, расположенным между полубесконечной изотропной средой и веществом подложки	208
Заключение	218
Библиографический список	219

Учебное издание

Семенова Оксана Рифовна

МАТРИЧНАЯ ОПТИКА

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *А. В. Цветкова*
Компьютерная верстка: *О. Р. Семенова*

Объем данных 2,21 Мб
Подписано к использованию 14.07.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15